Examen Synthèse d'images
M2 IUP SI
Janvier 2007

1 Carreaux paramétriques (6pts)

1.1 On rappelle qu'une courbe de Bézier de degré 2 $d_0(u)$ contrôlée par les points $S_{00}(0,0,0)$, $S_{10}(1,1,0)$, $S_{20}(2,0,0)$ est définie par l'équation :

$$d_0(u)=\sum_{i=0}^{i=2} B_i^2(u) S_{i0} \quad \text{avec} \quad B_i^n(u)=\frac{n!}{i!(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i} \qquad \forall u \in [0,1]$$

1.1.1 Donnez les équations des polynômes de Bernstein $B_0^2(u)$, $B_1^2(u)$ et $B_2^2(u)$. Calculez ces polynômes pour u=1/2 et calculez $d_0(1/2)$. (1pt)

0,5 0,5

1.1.2 Soient les sommets $S_{01}(0,1,1)$, $S_{11}(1,2,1)$, $S_{21}(2,1,1)$ et $S_{02}(0,0,2)$, $S_{12}(1,1,2)$, $S_{22}(2,0,2)$. La courbe de Bézier $d_j(u)$ (j=0..2) est contrôlée par les sommets S_{ij} (i=0..2). Calculez $d_1(1/2)$ et $d_2(1/2)$. **(2pts)**

1 1

1.1.3 Utilisez ces résultats pour calculer le point p(1/2,1/2) sur la surface paramétrique p(u,v) ($(u,v) \in [0,1]^2$) définie par produit tensoriel de 2 courbes de Bézier de degré 2 et contrôlée par les sommets S_{ij} (i=0..2 et j=0..2). Illustrer votre méthode de calcul et votre résultat sur un schéma. **(2pts)**

1

1.1.4 Il est rappelé que l'équation de p(u,v) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$p(u,v)=\sum_{i=0,\, j=0}^{i=2,\, j=2} B_{ij}^{2,2}(u,v) S_{ij} \quad \text{avec} \quad (u,v)\in[0,1]^2$$

Dans cette équation, donnez l'équation de $B_{02}^{2,2}(u,v)$ **(1pt)**

2 Surfaces implicites (4pts)

2.1 Donnez la fonction potentiel $f(x,y,z) : R^3 \rightarrow R$ dont l'équation f(x,y,z) = 0 définit le plan passant par les points A(0,0,0), B(1,1,0) et C(0,0,1) et telle que f(1,2,1) = -1. **(1pt)**

2.2 Proposez une fonction d'inclusion pour f et calculez f([0,1],[0,1],[0,1]). ~~Que pouvez-vous dire de~~ En déduire la position de ce volume par rapport au plan défini par f(x,y,z)=0 ? **(1pt)**

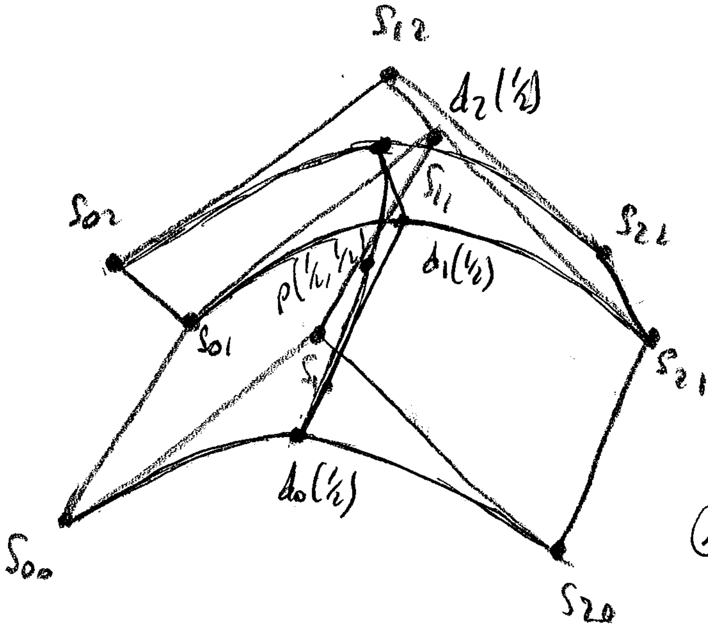
2.3 Soit un deuxième plan défini par f '(x,y,z) = 2x-y+z+3 = 0. Positionnez le volume $_{[\,]}P([0,1],[0,1],[0,1])$ par rapport à ce plan. Que peut-on dire de la position de $_{[\,]}P$ par rapport à l'intersection des deux plans, puis par rapport à leur union. Justifiez vos réponses de façon précise. **(2pts)**

1]

1.1.1 : $B_0^2(u) = (1-u)^2$; $B_1^2(u) = 2u(1-u)$; $B_2^2(u) = u^2$ (+) | $1/4$, $1/2$, $1/4$ (+) | $x_0(1/2) = 1$, $y_0(1/2) = 1/2$, $z_0(1/2) = 0$; $d_0(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5

1.1.2 $\begin{cases} x_1(1/2) = 1 \\ y_1(1/2) = 3/2 \\ z_1(1/2) = 1 \end{cases}$ $d_1(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1 ; $\begin{cases} x_2(1/2) = 1 \\ y_2(1/2) = 1/2 \\ z_2(1/2) = 2 \end{cases}$ $d_2(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1

1.1.3 $\begin{cases} x_p(1/2,1/2) = 1 \\ y_p(1/2,1/2) = 1/8 + 3/4 + \frac{1}{8} = 1 \\ z_p(1/2,1/2) = 1 \end{cases}$ $p(1/2,1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1



(1)

1.1.4 : $B_{02}^{2,2} = B_0^2(u) * B_2^2(v) = (1-u)^2 \cdot v^2$ (1)

$\boxed{2}$ 2.1 $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$

passe par A : $d = 0$ passe par C : $c = 0$

passe par B : $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$ $\Rightarrow f(x,y,z) = ax - ay$

$f(1,2,1) = -1 \Rightarrow a - 2a = -1 \Leftrightarrow a = 1$

$\boxed{f(x,y,z) = x - y}$ (1)

2.2 ${}_{[]}f : I^3 \to I$ (0,5)

${}_{[]}X, {}_{[]}Y, {}_{[]}Z \to {}_{[]}X -_{[]} {}_{[]}Y = {}_{[]}f({}_{[]}X, {}_{[]}Y, {}_{[]}Z)$.

(+)

$f([0,1], [0,1], [0,1]) = [0,1] -_{[]} [0,1] = [-1,1]$

$\Rightarrow$ le volume est sécant (+) au plan car la fonction d'inclusion choisie est juste

2-3 $2 *_{RCI} [0,1] -_{[]} [0,1] +_{[]} [0,1]_{[]R} + 3 = [0,2]_{[]} - [0,1]_{[]} + [3,4] = [-1,2]_{[]} + [3,4]$
$= [2,6]$ (0,5)

(0,5) $\Rightarrow$ le volume n'est pas sécant à ce plan, il est extérieur.

(on choisit la convention $f(P) > 0 \Rightarrow$ ext.

test $({}_{[]}f({}_{[]}P)_{CSR} < 0) = [0,1]$ intersection : $[0,1]_{[]}$ et $[0,0] = [0,0]$ $\Rightarrow$ extérieur de l'intersection

résultat (+)

test $({}_{[]}f'({}_{[]}P)_{CSR} < 0) = [0,0]$ justif. (0,5) union (+) : $[0,1]_{[]}$ ou $[0,0] = [0,1]$ $\Rightarrow$ sécant à l'union. ~~l'intersection~~