Modélisation Géométrique

M1 IUP SI 2006-2007.

1)

$$h\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{2}{8} - \tfrac{3}{4} + 1\right) A + \left(-\tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{4}\right) B + \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{2}\right) T_A + \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}\right) T_B$$

$$= \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{8} T_A - \tfrac{1}{8} T_B = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{8}(T_A - T_B)$$

$$h\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}(3) + \tfrac{1}{8}(3-3) = \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{1}{2}(0) + \tfrac{1}{8}(3+3) = \tfrac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \boxed{h\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{h^u(u) = (6u^2 - 6u)A + (-6u^2 + 6u)B + (3u^2 - 4u + 1)T_A + (3u^2 - 2u)T_B}$$

$$h^u\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{6}{4} - \tfrac{6}{2}\right) A + \left(-\tfrac{6}{4} + \tfrac{6}{2}\right) B + \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{2} + 1\right) T_A + \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{2}\right) T_B$$

$$= -\tfrac{3}{2} A + \tfrac{3}{2} B - \tfrac{1}{4} T_A - \tfrac{1}{4} T_B = \tfrac{3}{2}(B - A) - \tfrac{1}{4}(T_A + T_B) =$$

$$h^u\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3/2\,(3-0) - \tfrac{1}{4}(3+3) \\ 3/2\,(0-0) - \tfrac{1}{4}(3-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 - 6/4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{h^u(1/2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2)

$$P^t(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\, \Delta P_i \quad \text{avec } \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$= 3 \sum_{i=0}^{2} B_i^2(t)\, \Delta P_i = 3\left(B_0^2(t)(P_1 - P_0) + B_1^2(t)(P_2 - P_1) + B_2^2(t)(P_3 - P_2)\right)$$

$$B_0^2(t) = (1-t)^2 \qquad B_1^2(t) = 2t(1-t) \qquad B_2^2(t) = t^2$$

$u=0$: $\boxed{p^t(0) = 3\,(P_1 - P_0)}$ car $B_0^2(0)=1$ et $B_1^2(0)=B_2^2(0)=0$

$u=1$: $\boxed{p^t(1) = 3\,(P_3 - P_2)}$ car $B_0^2(1)=B_1^2(1)=0$ et $B_2^2(1)=1$

$p(t)$ et $h(u)$ sont toutes les deux des courbes polynomiales cubiques.
Pour que les courbes $p(t)$ et $h(u)$ coïncident, il faut qu'elles aient les mêmes extrémités : $\Rightarrow P_0 = A$ et $P_3 = B$ $\boxed{P_0 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ et } P_3 \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}$

et les mêmes tangentes aux extrémités : $3(P_1 - P_0) = T_A \Leftrightarrow P_1 = \frac{T_A}{3} + P_0$

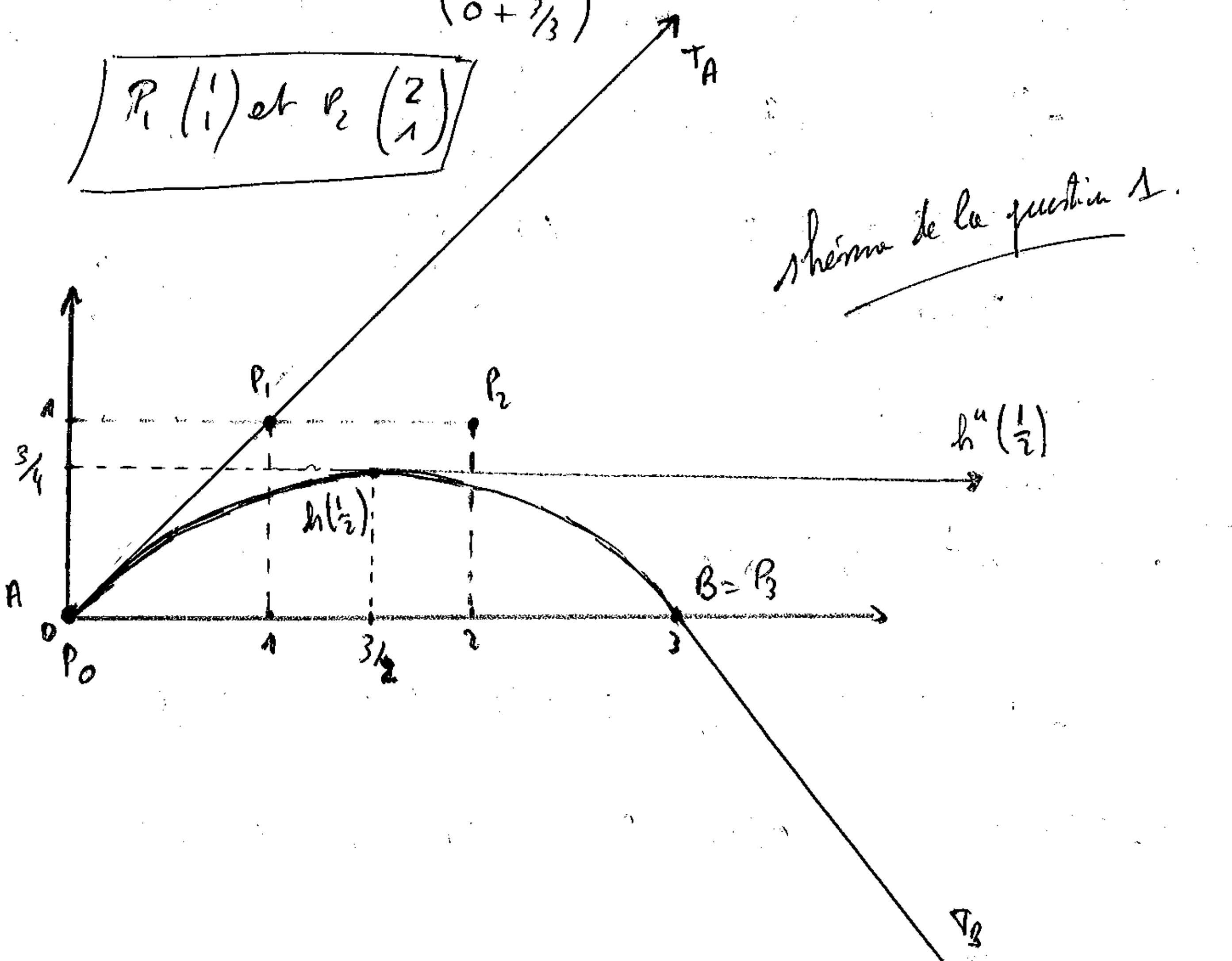
$$P_1 = \begin{pmatrix}3/3+0\\3/3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$3(P_3 - P_2) = T_B \Leftrightarrow P_2 = P_3 - T_B/3$$

$$P_2 = \begin{pmatrix}3-3/3\\0+3/3\end{pmatrix}$$

$\boxed{P_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ et } P_2 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$

schéma de la question 1.



3

équation du 1er hodographe de $p(t)$: $hodo(t) = O + p^t(t)$

où O est un pt de l'espace. (par exemple $O(0,0)$)

$$\boxed{hodo(t) = O + 3\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t)\,\Delta P_i}$$

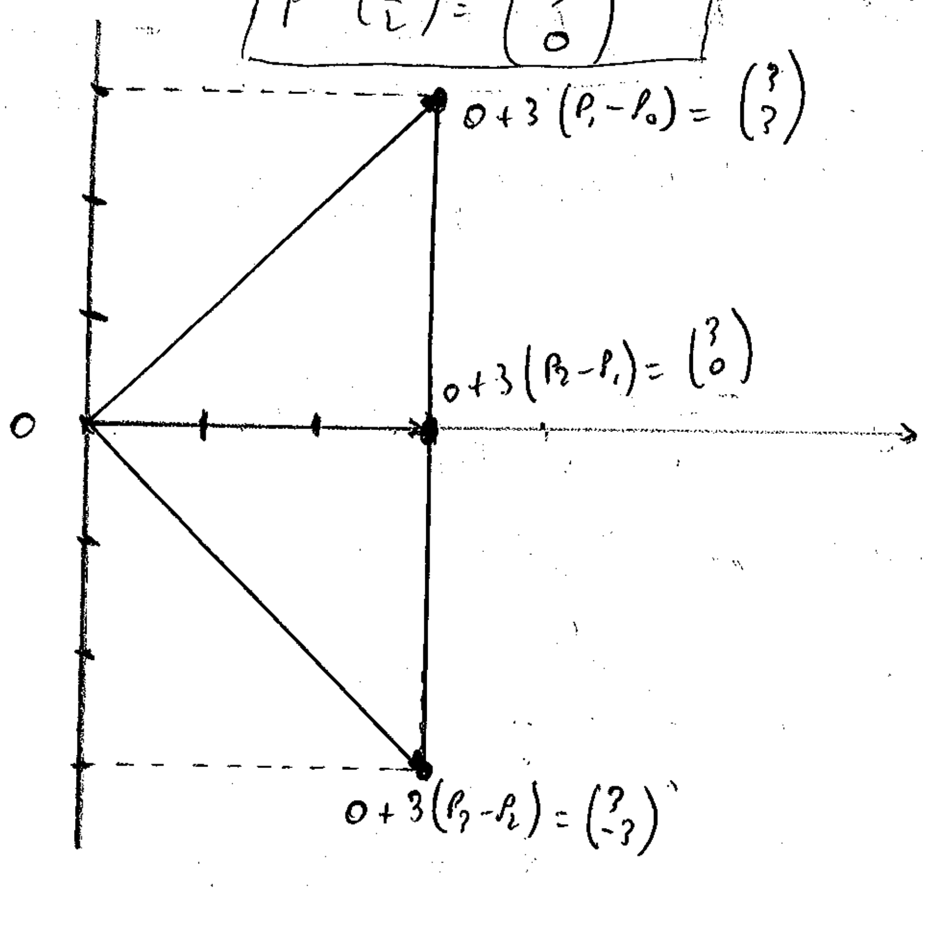
ĉ les courbes $p(t)$ et $h(u)$ coïncident, $\boxed{p^t(\tfrac{1}{2}) = h^u(\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}$

$$p^t(\tfrac{1}{2}) = 3\left(B_0^2(\tfrac{1}{2})\,(P_1-P_0) + B_1^2(\tfrac{1}{2})\,(P_2-P_1) + B_2^2(\tfrac{1}{2})\,(P_3-P_2)\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3-2\\0-1\end{pmatrix}\right)$$

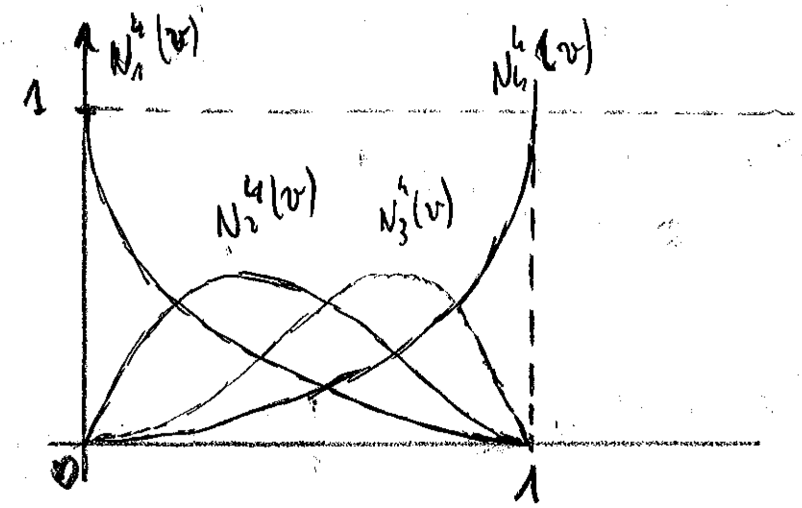
$$= 3\left[\begin{pmatrix}1/4\\1/4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2/4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/4\\-1/4\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{p^t(\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}$$



4-1

vecteur nodal : $(v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6\ v_7\ v_8) = (0\,0\,0\,0\ 1\,1\,1\,1)$



$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ $\qquad$ $v_5 = v_6 = v_7 = v_8 = 1$

intervalle de définition : $v \in [0,1]$

fonction de base : $q(v) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^k(v)\, Q_i = \sum_{i=1}^{4} N_i^4(v)\, Q_i$

$\Rightarrow$ 4 fonctions de base : $N_1^4(v)$, $N_2^4(v)$, $N_3^4(v)$ et $N_4^4(v)$

$N_1^4(v)$ commence en v_1, $N_2^4(v)$ en v_2 $\Rightarrow$ d'où le schéma.

$N_3(v)$ et $N_4(v)$ sont déduites par symétrie

4-2

$$q^v(v) = m \sum_{i=1}^{m} \frac{N_{i+1}^{k-1}(v)}{v_{m+i+1} - v_{i+1}}\, \Delta Q_i$$

pour nous : $k=4$, $n+1=4$, $m=3$ d'où

$$q^v(v) = 3 \sum_{i=1}^{3} \frac{N_{i+1}^{3}(v)}{v_{4+i} - v_{i+1}}\, \Delta Q_i$$

or $\forall i = 1..3$ $\quad v_{i+4} - v_{i+1} = 1$ d'où $\boxed{q^v(v) = 3 \sum_{i=1}^{3} N_{i+1}^{3}(v)\, \Delta Q_i}$

4-3

a

$$q^v(0) = 3\left[\underset{\substack{\| \\ 1}}{N_2^3(0)}\,\Delta Q_1 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{N_3^3(0)}\,\Delta Q_2 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{N_4^3(0)}\,\Delta Q_3\right]$$

$$\Rightarrow q^v(0) = 3\,\Delta Q_1 = \boxed{3(Q_2 - Q_1) = q^v(0)}$$

$$q^v(1) = 3\left[\underset{\substack{\| \\ 0}}{N_2^3(1)}\,\Delta Q_1 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{N_3^3(1)}\,\Delta Q_2 + \underset{\substack{\| \\ 1}}{N_4^3(1)}\,\Delta Q_3\right]$$

$$= 3\,\Delta Q_3 = \boxed{3(Q_4 - Q_3) = q^v(1)}$$

b

q a un vecteur nodal ouvert uniforme $\Rightarrow$ elle commence en son premier point de contrôle et finit en son dernier.

d'où $Q_1 = P_0$ et $Q_4 = P_3$

pour que les tangentes soient identiques il faut que (aux extrémités) :

$$p^t(0) = q^v(0) \iff 3(P_1 - P_0) = 3(Q_2 - Q_1)$$

or $Q_1 = P_0$ d'où $3(P_1 - P_0) = 3(Q_2 - P_0)$

d'où $Q_2 = P_1$

$$p^t(1) = q^v(1) \iff 3(P_3 - P_2) = 3(Q_4 - Q_3)$$

or $Q_4 = P_3$ d'où $3(P_3 - P_2) = 3(P_3 - Q_3)$

d'où $Q_3 = P_2$

Ce qui nous donne : $Q_1 = P_0$, $Q_2 = P_1$, $Q_3 = P_2$ et $Q_4 = P_3$

$\boxed{c}$ les courbes $p(t)$ et $q(v)$ ont les m̂ pts de contrôle, les m̂ tangentes en extrémités et les m̂ points extrémité et ce sont 2 courbes de degré 3 donc elles coïncident. (une courbe de degré 3 est complètement définie avec les paramètres → voir Hermite. Ici les 2 courbes ont les paramètres de la tangente + pt de départ et tgte + pt d'arrivée ⇒ elles coïncident).

$\boxed{d}$ $p(t)$ et $q(v)$ coïncident et ont les m̂ pts de contrôle donc elles ont aussi les m̂ fonction de base. $p(t)$ étant une courbe de Bézier, les $N_i^4(v)$ sont les polynômes de Bernstein de degré 3 soit :

$$N_1^4(v) = (1-v)^3$$

$$N_2^4(v) = 3v(1-v)^2$$

$$N_3^4(v) = 3v^2(1-v)$$

$$N_4^4(v) = v^3$$