Corrigé

Examen Synthèse d'Images (M1-OP2)

27 juin 2006

QCM

1.1 $\left.\begin{array}{l} D_m = 3F \\ D_a = 2A \end{array}\right\} \Rightarrow 3F = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}F$

réponse (a)

1.2 réponse (c)

1.3 réponse (b)

1.4 réponse (c)

1.5 $\dot{p}(1) = Tf$ $\qquad \dot{q}(2) = \frac{1}{8} V_i$

pour avoir un raccord de continuité C^1, il faut que $\dot{p}(1) = \dot{q}(2)$

C'est à dire : $Tf = \frac{1}{8} V_i$

réponse (d)

B-spline de degré 2 $\Rightarrow k = 3$

3 pts de contrôle $\Rightarrow n+1 = 3$

$\boxed{2.1}$ a) l'ordre k est à choisir dans l'intervalle $[2 .. n+1]$

donc le degré dans l'intervalle $[1 .. n]$ c'est à dire : $[1 .. 2]$

b) vecteur nodal : $(u_1 .. u_{k+n+1}) \Rightarrow 6$ noeuds

c) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6)$

d) intervalle de définition : $u \in [u_k, u_{n+2}]$

$u \in [u_3, u_4]$

$u \in [3, 4]$

e) B-spline d'ordre 3 :

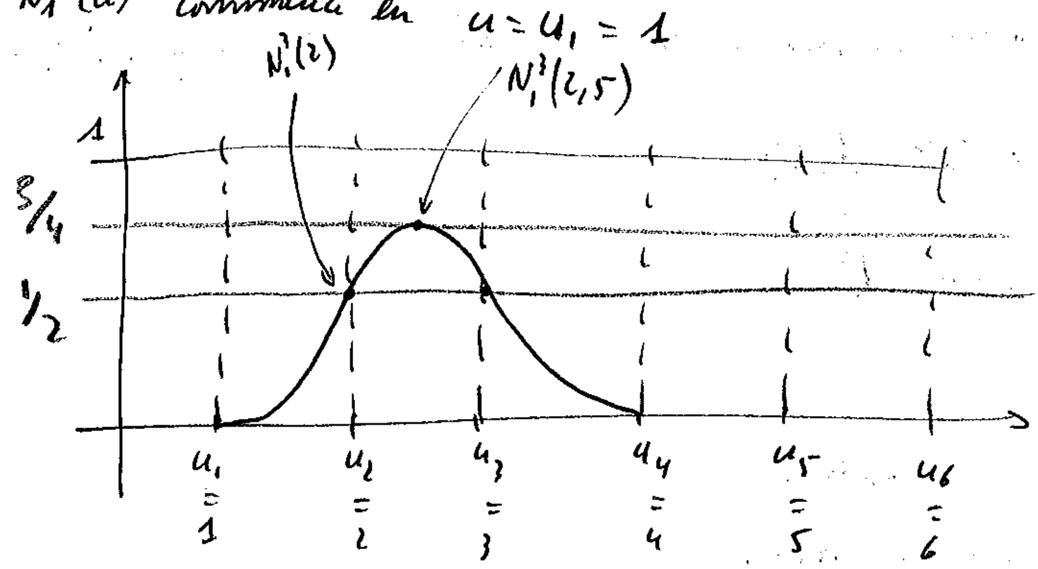
$$P(u) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^3(u)\, P_i$$

$n+1 = 3 \quad \Rightarrow \quad P(u) = \sum_{i=1}^{3} N_i^3(u)\, P_i$

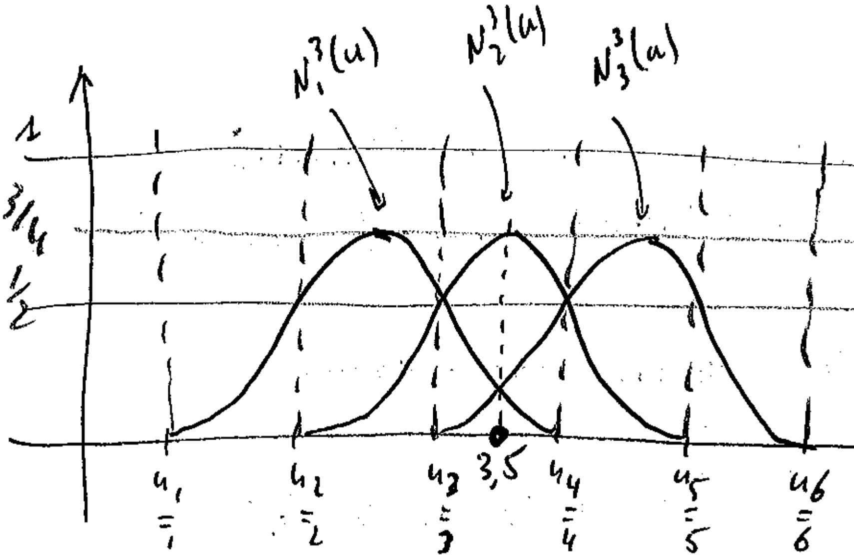
$\Rightarrow$ 3 fonctions de base (1 pour chaque point de contrôle)

$\boxed{2\_2}$

a) $N_1^3(u)$ commence en $u = u_1 = 1$



b)



$P(3,5) = N_1^3(3,5)\, P_1 + N_2^3(3,5)\, P_2$
$\quad + N_3^3(3,5)\, P_3$

on sait que $N_2^3(3,5) = \frac{3}{4}$

et $\begin{cases} N_1^3(3,5) = N_3^3(3,5) \\ 1 = N_1^3(3,5) + N_2^3(3,5) + N_3^3(3,5) \end{cases}$

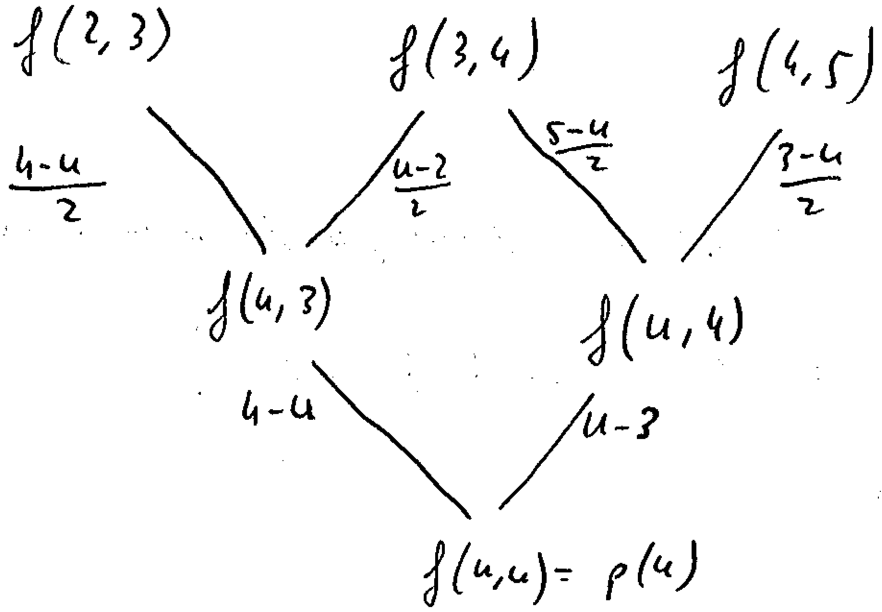
d'où $N_1^3(3,5) = N_3^3(3,5) = \frac{1}{8}$

d'où $p(3,5) = \frac{1}{8} P_1 + \frac{3}{4} P_2 + \frac{1}{8} P_3$

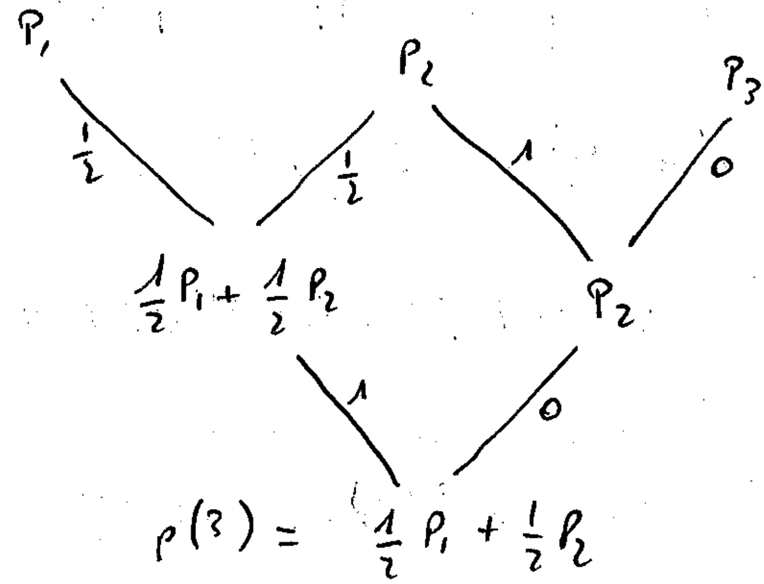
$p(3,5) = \left(1, \frac{3}{4}\right)$

c) points de contrôle : $P_1 = f(2,3)$
$P_2 = f(3,4)$
$P_3 = f(4,5)$

degré 2 => floraison à 2 arguments

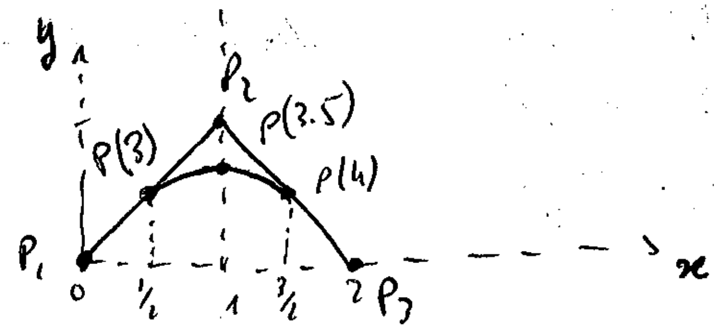


$\boxed{u=3} \Rightarrow$



$p(3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) le polygône de contrôle est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par P_2. $P(3,5)$ est sur cet axe donc $P(4)$ est le symétrique de $P(3)$ d'où $P(4) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$



2-3

a) la courbe passe par le 1er et le dernier point du polygone de contrôle.

b) $(u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6) = (1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2)$

c) $u \in [u_3, u_4]$

$u \in [1, 2]$

car ouvert uniforme (courbe débute au premier pt de contrôle)

d) $N_1^3(1) = 1$ car $p(1) = P_1 = N_1^3(1)P_1 + N_2^3(1)P_2 + N_3^3(1)P_3$

d'où $N_1^3(1) = 1$, $N_2^3(1) = 0$ et $N_3^3(1) = 0$

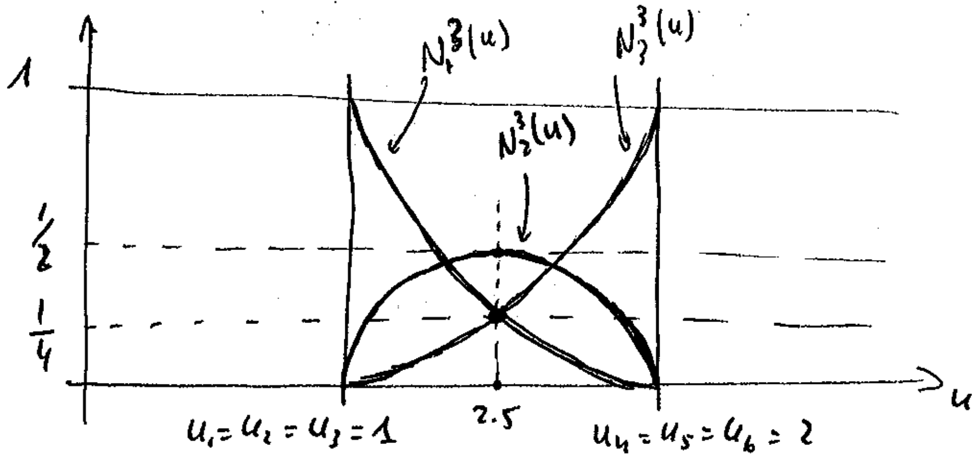
on a aussi: $p(2) = P_3 = N_1^3(2)P_1 + N_2^3(2)P_2 + N_3^3(2)P_3$

la courbe termine au dernier pt de contrôle.

d'où $N_1^3(2) = 0$, $N_2^3(2) = 0$ et $N_3^3(2) = 1$

e) $N_2^3(1.5) = \frac{1}{2}$ or : $\begin{cases} N_1^3(1.5) = N_3^3(1.5) \\ \text{et} \\ N_1^3(1.5) + N_2^3(1.5) + N_3^3(1.5) = 1 \end{cases}$

d'où $N_1^3(1.5) = N_3^3(1.5) = \frac{1}{4}$



f) $p(1.5) = N_1^3(1.5)\,P_1 + N_2^3(1.5)\,P_2 + N_3^3(1.5)\,P_3$

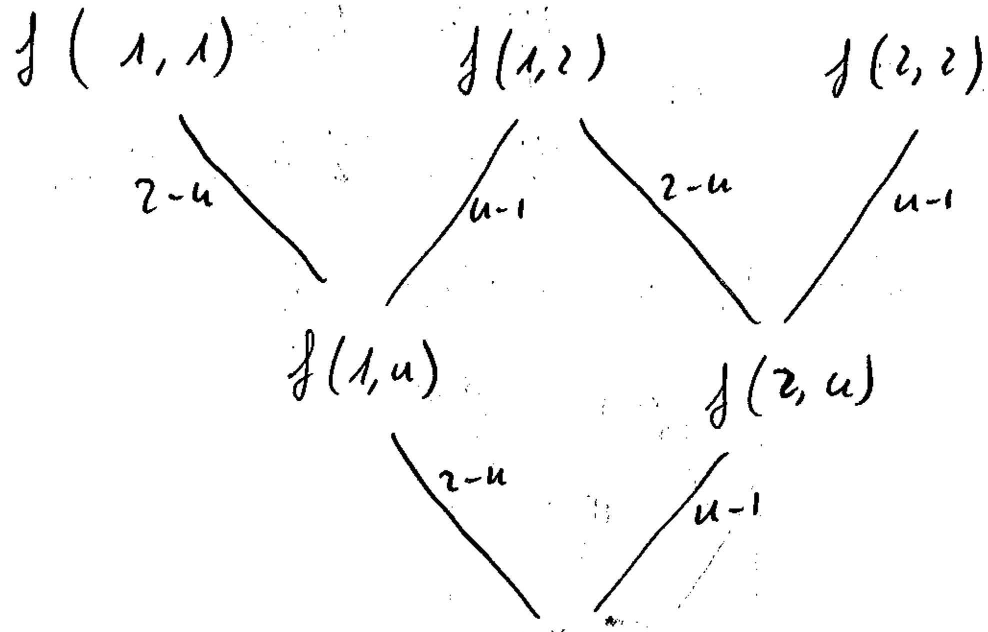
$= \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{4} P_3 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

g) pts de contrôle : $P_1 = f(u_2, u_3) = f(1,1)$

$P_2 = f(u_3, u_4) = f(1,2)$

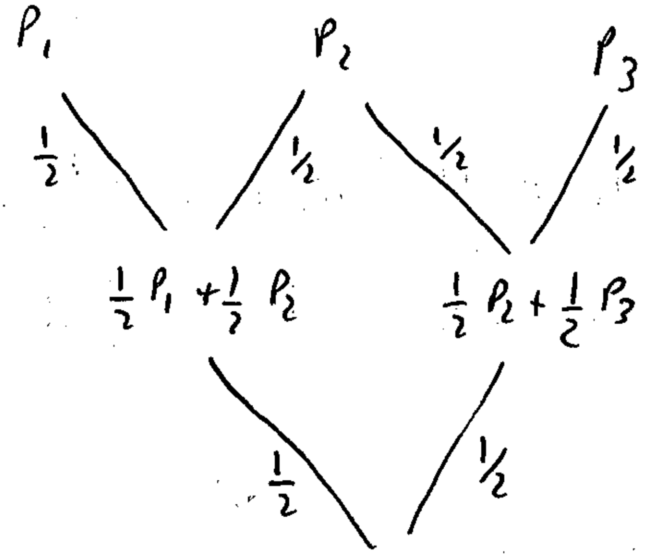
$P_3 = f(u_4, u_5) = f(2,2)$

6



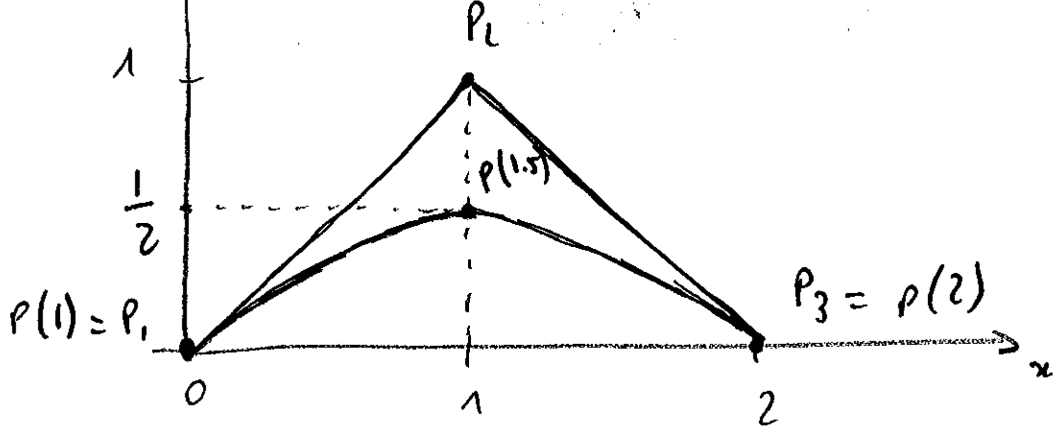
$f(u,u) = p(u)$

$\boxed{u = 1.5} \Rightarrow$



$$p(1.5) = \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{4} P_3$$

$$p(1.5) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$



2-4

a) 3 pts de contrôle $\Rightarrow$ courbe de Bézier de degré **2**.

b)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 1-u \arrow[r] \arrow[dr] & (1-u)^2 = B_0^2(u) \\
& u \arrow[r] \arrow[dr] & 2u(1-u) = B_1^2(u) \\
& & u^2 = B_2^2(u)
\end{tikzcd}$$

c)

$$b(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u)\, Q_i = \sum_{i=0}^{2} B_i^2(u)\, Q_i$$

$$b(0.5) = \frac{1}{4} Q_0 + \frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{4} Q_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

d) $b(0) = Q_0 = P_1$ $\qquad$ $b(1) = Q_2 = P_3$

(une courbe de Bézier débute au premier point de son polygone de contrôle et finie au dernier).

e) il y a exactement 1 polynôme de degré 2 qui passe par 3 points distincts.

$$\left.\begin{array}{l}
p(u) \text{ passe par les pts: } P_1,\ P_3 \text{ et } \left(1, \frac{1}{2}\right) \\
b(u) \text{ passe par les pts: } Q_0 = P_1,\ Q_2 = P_3 \text{ et } \left(1, \frac{1}{2}\right)
\end{array}\right\} \text{ les courbes sont identiques.}$$