Tarskis Fixpunktsatz
und
höherstufige Termersetzungssysteme

Ralph Matthes[a], LMU München

Forschungskolloquium „Foundations of the Formal Sciences“ im Mai 1999
an der Humboldt-Universität zu Berlin

[a] matthes@informatik.uni-muenchen.de,
Homepage: http://www.tcs.informatik.uni-muenchen.de/~matthes/

English title and summary:

Tarski's fixed-point theorem and higher-order term rewrite systems

Tarski proved that monotone operators on complete lattices have a least fixed-point which is simply given by the infimum of all pre-fixed-points. This theorem is the basis of a general understanding of induction. The computational counterpart of induction is iteration. Classically, one may derive (full) primitive recursion from iteration. However, this translation is computationally not acceptable. We introduce some polymorphic lambda calculi suitable for studying those phenomena. Led by the lattice-theoretic motivation we even arrive at a surprisingly simple reduction of arbitrary monotone inductive types (the lambda calculus representation of those least fixed-points) to syntactically monotone (i. e. positive) inductive types—reduction in the sense of higher-order term rewrite systems which is simulation of computation.

Tarskis Fixpunktsatz (1939, publiziert 1955)

Gegeben: $(U, \subseteq, \wedge, \vee)$ vollständiger Verband von Mengen mit Mengeninklusion $\subseteq$ und monotones $\Phi : U \to U$.

Dann ist

$$\mu\Phi := \bigwedge \{M | \Phi(M) \subseteq M\} \qquad \text{(Infimum der Präfixpunkte)}$$

Präfixpunkt von Φ, d. h. $\Phi(\mu\Phi) \subseteq \mu\Phi$ $\qquad$ (μ-I).

$\mu\Phi$ ist sogar Fixpunkt, was wir nicht benutzen.

Sprechweise: $\mu\Phi$ ist mittels des „Operators“ Φ induktiv erzeugt.

Nach Definition gilt für jedes M: $\Phi(M) \subseteq M \Rightarrow \mu\Phi \subseteq M$ $\qquad$ (μ-E).

(μ-E) ist das Induktionsprinzip.

Beispiel $U := \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit mengentheoretischen Verbandsoperationen (Schnitt und Vereinigung).

$$\Phi(M) := \{0\} \cup \{r+1 | r \in M\}.$$

Setze wie üblich $\mathbb{N} := \mu\Phi$. Zeige nun $r \in \mathbb{N} \Rightarrow r^2 \in \mathbb{N}$ mittels Induktion. Dazu $M := \{r | r^2 \in \mathbb{N}\}$. Also genügt $\Phi(M) \subseteq M$. 0 geht klar. Sei nun $r \in M$. Zeige $r+1 \in M$, d. h.
$(r+1)^2 = r^2 + r + r + 1 \in \mathbb{N}$. Glauben wir einmal, daß Addition nicht aus den natürlichen Zahlen herausführt. Dann kommen wir trotzdem nicht weiter, da $r \in \mathbb{N}$ nicht bekannt ist.

Ausweg Betrachte $M' := \mathbb{N} \cap M$ und zeige $\Phi(M') \subseteq M$, denn dann dank Tarskis Satz — schlicht der Regel (μ-I) — und Φs Monotonie auch $\Phi(M') \subseteq M'$, also $\mathbb{N} \subseteq M' \subseteq M$.

Meist setzen Mathematiker gleich intuitiv den Schnitt mit der induktiv definierten Menge an. Dies zumeist auch dann, wenn er unnötig ist. Für uns ist die Unterscheidung wichtig.

Nun wieder allgemein: Leicht erhält man aus (μ-I), (μ-E) und Φs Monotonie folgende abgeleitete Regel der „erweiterten Induktion“ für alle M: $\Phi(\mu\Phi \wedge M) \subseteq M \Rightarrow \mu\Phi \subseteq M \qquad (\mu\text{-E}^+)$.

Das war klassisch argumentiert ohne jeden „Zeugen“ dafür, warum die Inklusion $\subseteq$ zutrifft. „Zeugen“ sind gerade das, was die Kategorientheorie (i. S. v. Eilenberg und Mac Lane, erstmals publiziert 1942) der Theorie der partiellen Ordnungen „voraus hat“.

Kategorie

- Objekte
- Morphismen zwischen je zwei Objekten
- Komposition von Morphismen
- einige Eigenschaften

Falls es von A nach B immer höchstens einen Morphismus gibt, dann reduziert sich das alles auf eine partielle (also reflexive und transitive) Ordnung der Objekte.

Funktor

- Abbildung von einer Kategorie in eine Kategorie
- wirft Objekte auf Objekte und Morphismen auf Morphismen
- einige Verträglichkeitsbedingungen

Im Fall der Ordnung bedeutet das bloß Monotonie.

Statt kleinster Präfixpunkte monotoner Operatoren betrachten wir nun allgemein initiale Algebren bzgl. Endofunktoren.

Initiale Algebra Sei F Funktor von einer Kategorie in dieselbe.
Initiale F-Algebra ist ein Paar (M, c) mit

- M ist Objekt der Kategorie
- c ist Morphismus von $F(M)$ nach M

und: Ist (S, s) irgendeine F-Algebra,
d. h. S Objekt und s Morphismus von $F(S)$ nach S,
so gibt es genau einen Morphismus Es von M nach S mit
$Es \circ c = s \circ F(Es)$ („=“ gilt immer für partielle Ordnungen!).

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{c} & M \\ {\scriptstyle F(Es)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Es} \\ F(S) & \xrightarrow[s]{} & S \end{array}$$

Beachte: c von $F(M)$ nach M entspricht unserem (μ-I).

Ziel Studiere konstruktive Aspekte kleinster Präfixpunkte mittels Termersetzungssystemen, die initiale Algebren modellieren.

- Morphismen und Komposition funktional
- Lambda-Kalkül als Basisformalismus für Funktionen/Funktionale
- Objekte sind nun Typen: Zeichenketten, aufgebaut aus Variablenzeichen und Typbildnern, v. a. $\to$:
- Hat man Typen ρ und σ, so ist auch $\rho \to \sigma$ ein Typ: gedacht als der Typ der Funktionen von ρ nach σ, d. h. der Funktionale, deren Argumente Typ ρ haben und deren Resultate den Typ σ.
- „Funktionale“, da die Argumente schon Funktionen (oder gar Funktionale) sein dürfen. In Analysis z. B. Differentiation.

- Morphismen zwischen Objekten: nun „Terme“ vom Typ $\rho \to \sigma$, wobei Terme (für beliebige Typen) für Funktionale ihres Typs stehen:

- Terme sind bloße Syntax. Es gibt

  - getypte Variablen x^ρ
  - Lambda-Abstraktion $\lambda x^\rho r^\sigma : \rho \to \sigma$ (für r bereits Term vom Typ σ). Das ist funktionale Abstraktion. In der Mathematik ist $x \mapsto r(x)$ üblich, aber auch $r(\cdot)$. $r(x)$ ist r, aber metasyntaktisch aufgebläht!
  - Anwendung $r^{\rho\to\sigma}\, s^\rho : \sigma$: r hat als Argumenttyp den Typ σ von s. Also wohlgetypt! Ergebnis der Anwendung hat den Resultattyp ρ von r. In der Mathematik ist $r(s)$ üblicher.

Das System ist tot. Leben entsteht durch Termersetzung. Wendet man $x \mapsto r(x)$ auf s an, so ist das Ergebnis das Ergebnis von $r(s)$.

Im Termsystem erlauben wir Beta-Reduktion: $(\lambda x r)s$ darf durch $r[x := s]$ ersetzt werden, wobei $r[x := s]$ aus r entsteht durch Ersetzen jedes freien Vorkommens von x in r durch s.

Termersetzung darf auch nur für einen Teilterm ausgeführt werden.

Altbekannt: Für den einfach getypten Lambda-Kalkül (wie beschrieben) kann Termersetzung nicht unendlich oft in Folge geschehen — unabhängig von der Auswahlstrategie (im Falle einer Wahlmöglichkeit): „starke Normalisierung“.

Im Falle einer Wahl können je zwei mögliche Ersetzungsergebnisse eines Ausgangsterms durch weitere Ersetzung wieder gleich gemacht werden: „Konfluenz“.

Folge: Die durch Termersetzung erzeugte Gleichheit ist entscheidbar.

Induktive Typen Fixiere Typ ρ und Typvariable α. Statt eines Objekts M wird der induktive Typ $\mu\alpha\rho$ postuliert. Interpretation: kleinster Präfixpunkt von $\alpha \mapsto \rho$. Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \rho[\alpha := \mu\alpha\rho] & \xrightarrow{\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho\cdot}} & \mu\alpha\rho \\ {\scriptstyle (\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle .\mathrm{E}_\mu s} \\ \rho[\alpha := \sigma] & \xrightarrow[s]{} & \sigma \end{array}$$

Der Morphismus der initialen Algebra wird zur Termerzeugungsregel: Ist t ein Term vom Typ $\rho[\alpha := \mu\alpha\rho]$, dann $\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t$ ein Term vom Typ $\mu\alpha\rho$. Wir modellieren nur schwache Initialität. Dazu eine Termerzeugungsregel und eine Termersetzungsregel: Ist s ein Term vom Typ $\rho[\alpha := \sigma] \to \sigma$ und r vom Typ $\mu\alpha\rho$, dann $r\mathrm{E}_\mu s$ vom Typ σ, und

$$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t^{\rho[\alpha:=\mu\alpha\rho]})\mathrm{E}_\mu s \mapsto s\Big((\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s)t\Big).$$

Welcher Term ist $(\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s)$? Er entspricht der Anwendung des Funktors auf den Morphismus und muß $\rho[\alpha := \mu\alpha\rho] \to \rho[\alpha := \sigma]$ als Typ haben.

Beispiele $\mathrm{nat} := \mu\alpha.1 + \alpha$. (1 modelliere einen Singleton und $\rho + \sigma$ die disjunkte Vereinigung von ρ und σ.) s kodiert dann den Anfang und den Schritt zusammen. $\mathrm{C}_{\mathrm{nat}}$ kodiert Null und Nachfolger zusammen. Der fragliche Term muß also den Konstruktor wieder zerlegen und Anfang und Schritt (in ihrer Kodierung) übergeben.

$\mathrm{cont} := \mu\alpha.1 + ((\alpha \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{nat})$. Ignoriere die Aufgaben von eben: Man hat Konstruktoren $D : \mathrm{cont}$, $C : ((\mathrm{cont} \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{cont}$. Wir wünschen uns einen Term $e : \mathrm{cont} \to \mathrm{nat}$ mit $eD = 0$ und $e(Cf) = fe$ für alle f. In der Tat ist das Iteration. Späteres Resultat: Als Termersetzungssystem ist diese Definition terminierend.

ρ-verzweigte fundierte Bäume: $\mathrm{tree}(\rho) := \mu\beta.1 + (\rho \to \beta)$.

Stark verzweigte fundierte Bäume nach U. Berger:

$$\mu\alpha.1 + (\mathrm{tree}(\alpha) \to \alpha),$$

ein verschränkter nicht-strikt positiver induktiver Typ.

Wohlbekannt: Bildet man $\mu\alpha\rho$ nur für α nur positiv in ρ, so gibt es geschlossene Terme $\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\tau_1,\tau_2}$ vom Typ $(\tau_1 \to \tau_2) \to \rho[\tau_1] \to \rho[\tau_2]$. Dann können wir setzen:

$$(\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s) := \mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\mu\alpha\rho,\sigma}(\lambda x^{\mu\alpha\rho}.x\mathrm{E}_\mu s).$$

Satz Dieses Termersetzungssystem ist stark normalisierend.

Beweis: reduktionserhaltende Einbettung in Girards System F.

Girards F (1972) ist der polymorphe Lambda-Kalkül. Wir haben Alltypen, d. h. für jeden Typ ρ und jede Typvariable α bilden wir den Typ $\forall\alpha\rho$.

Dazu zwei neue Termregeln:

- Ist r Term vom Typ ρ, so $\Lambda\alpha r$ ein Term vom Typ $\forall\alpha\rho$, falls α nicht frei im Typ einer in r freien Variablen ist (motiviert durch den Curry-Howard-Isomorphismus).
- Ist r vom Typ $\forall\alpha\rho$, so $r\sigma$ ein Term vom Typ $\rho[\alpha := \sigma]$.

Die zusätzliche Termersetzungsregel: $(\Lambda\alpha r)\sigma \mapsto r[\alpha := \sigma]$.

Girards Geniestreich: ein Normalisierungsbeweis für F. Seither entstanden zahllose Beweise sogar von starker Normalisierung. Sie sind inhärent schwer zu führen, da sie die Arithmetik zweiter Stufe übersteigen.

Einbettung sei eine Übersetzung eines Termersetzungssystems in ein zweites, bei dem die Typen und die Terme verträglich übersetzt werden und ein Reduktionsschritt im Ausgangssystem nach Übersetzung mindestens einen Schritt im Zielsystem auslöst.

Ist das Zielsystem stark normalisierend, so ist es auch das Ausgangssystem. Die Übersetzung unserer induktiven Typen folgt der üblichen Methode in polymorphen Systemen.

Volle primitive Rekursion ist mehr als Iteration. Sie entspricht genau der „erweiterten Induktion“, die abgeleitet war. Die Ableitung läßt sich im Termkalkül nachbilden, hat aber ein unerwünschtes Reduktionsverhalten. Keiner glaubt, daß man in System F eine rechnerisch überzeugende Vorgängerfunktion für (passend kodierte) Zahlen erhält. Daher nun Hinzunahme der „erweiterten Induktion“ $\Phi(\mu\Phi \wedge M) \subseteq M \Rightarrow \mu\Phi \subseteq M$ als Basisregel.

Die Infimumbildung in (μ-E$^+$) wird durch ein kategorielles Produkt bzw. durch Produkttypen dargestellt.

Statt nur initialer F-Algebra nun auch eine initiale rekursive F-Algebra: Zusätzlich muß es zu S Objekt und s Morphismus von $F(M \times S)$ nach S genau einen Morphismus E^+s von M nach S geben mit $E^+s \circ c = s \circ F(\langle \mathrm{Id}, E^+s \rangle)$.

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\quad c \quad} & M \\ {\scriptstyle F(\langle \mathrm{Id}, E^+s \rangle)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E^+s} \\ F(M \times S) & \xrightarrow[\quad s \quad]{} & S \end{array}$$

Auf der Termebene ergibt das eine Termbildungsregel: $r : \mu\alpha\rho$ und $s : \rho[\alpha := \mu\alpha\rho \times \sigma] \to \sigma$ formen $r\mathrm{E}_\mu^+ s : \sigma$.

Die Regel kommt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \rho[\alpha := \mu\alpha\rho] & \xrightarrow{\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho\cdot}} & \mu\alpha\rho \\ {\scriptstyle (\lambda\alpha\rho)(\langle \mathrm{Id}, .\mathrm{E}_\mu^+ s\rangle)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle .\mathrm{E}_\mu^+ s} \\ \rho[\alpha := \mu\alpha\rho \times \sigma] & \xrightarrow[s]{} & \sigma \end{array}$$

Wenn wir uns weiter auf positive induktive Typen einschränken, können wir gleich setzen

$$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho} t)\mathrm{E}_\mu^+ s \mapsto s\Big(\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\mu\alpha\rho,\mu\alpha\rho\times\sigma}\Big(\lambda x^{\mu\alpha\rho}.\langle x, (\lambda x^{\mu\alpha\rho}.x\mathrm{E}_\mu^+ s)x\rangle\Big)t\Big)$$

Satz Mein System ist stark normalisierend.

Beweis: z. B. Erweiterung eines passenden Beweises für System F.

Am besten gleich System F mit aufnehmen. Dort sind geschlossene Terme $\Lambda\alpha\Lambda\beta.\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\alpha,\beta} : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \rho \to \rho[\alpha := \beta]$. Sie bezeugen offenkundig die durch ihren Typ ausgedrückte Monotonie von $\lambda\alpha\rho$. Und die kommt von der syntaktischen Forderung der Positivität.

Zentrale Idee Es kommt für die starke Normalisierung der Systeme induktiver Typen nicht auf die konkrete Definition solcher Monotoniezeugen an.

Er muß nicht einmal geschlossen sein: bedingte Monotonie.

Der Zeuge darf sogar eine Variable sein: hypothetische Monotonie.

Nur müssen diese Zeugen dann in den Termbildungsregeln auftauchen, damit die Reduktionsregel auf sie zugreifen kann (beigegebene Monotoniezeugen).

Ein System monotoner induktiver Typen

- Bilde $\mu\alpha\rho$ uneingeschränkt.
- Ändere die Konstruktionsregel zu: Wenn $t : \rho[\alpha := \mu\alpha\rho]$ und $m : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \rho \to \rho[\alpha := \beta]$, dann $\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho} m t : \mu\alpha\rho$.
- Behalte die anderen Termbildungsregeln bei.
- Ersetze in den beiden(!) Reduktionsregeln map durch m, angewandt auf den zweiten und dritten Index von map.

Satz Dieses System ist stark normalisierend.

Beweis: ohne (μ-E^+) durch Einbettung in F, sonst z. B. durch kunstvolle Erweiterung eines geeigneten Beweises für F.

Normalisierung ist nicht selbstverständlich. Dies ist schon durch Iteration belegbar: Belasse die alte Konstruktionsregel, aber gib Zeugen einer abgeschwächten Monotonie zur Termbildungsregel für Iteration. Zur Auswahl stehen

$$m : \forall\beta.(\mu\alpha\rho \to \beta) \to \rho[\alpha := \mu\alpha\rho] \to \rho[\alpha := \beta] \qquad \text{und}$$

$$m : \forall\alpha.(\alpha \to \sigma) \to \rho \to \rho[\alpha := \sigma].$$

Beide Male ist eine Variante der Reduktionsregel trotz der Abschwächung leicht anzugeben (sonst wird ja auch immer der erste Typ auf $\mu\alpha\rho$ und der zweite auf σ gesetzt).

Lemma Eines der Systeme ist stark normalisierend, das andere nicht einmal schwach.

Beweis: Wieder eine geschickte Variante im positiven Fall, ein Gegenbeispiel im negativen Fall.

Der erste Fall ist negativ.

Setze $\rho := \alpha$, wähle t und σ beliebig und $s := \lambda y^{\sigma} y$.

$$m := \Lambda\beta\lambda z^{\mu\alpha\alpha\to\beta}\lambda u^{\mu\alpha\alpha}.z(\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}u).$$

Es ist sogar ein geschlossener Zeuge. Würde man $\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}$ weglassen, wäre das der kanonische Monotoniezeuge, der nicht die Spezialität des ersten Arguments ausnutzt.

$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}t)\mathrm{E}_{\mu}ms$ reduziert in zwei Schritten zu $m\sigma(\lambda x^{\mu\alpha\alpha}.x\mathrm{E}_{\mu}ms)t$ und weiter in drei Schritten zu $(\lambda x^{\mu\alpha\alpha}.x\mathrm{E}_{\mu}ms)(\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}t)$, also in insgesamt sechs Schritten zum Ausgangsterm. So kommt man in eine unendliche Schleife, die man durch eine andere Strategie nicht vermeiden kann.

Hauptsatz Das System der monotonen induktiven Typen mit voller primitiver Rekursion und Iteration läßt sich einbetten in die Erweiterung von System F um unverschränkte positive induktive Typen mit voller primitiver Rekursion.

Da dies umgekehrt in einfacher Weise auch geht, sind die Systeme äquivalent bzgl. Reduktionen, also intensional äquivalent.

Beweis: Eine erstaunlich einfache Transformation, die mit einem Zwischensystem verstanden wird, das sich aus einer einfachen Betrachtung in der Verbandstheorie motiviert. Gefunden wurde sie durch Analogiebildung zu einem System von Mendler (1987) und Analyse der direkten Normalisierungsbeweise mittels saturierter Mengen (à la Tait 1975).

Die Motivation Gegeben wieder $(U, \subseteq, \wedge, \vee)$ vollständiger Verband von Mengen mit Mengeninklusion $\subseteq$. Dazu beliebiges $\Phi : U \to U$. Definiere die untere Monotonisierung $\Phi^{\subseteq}$ durch

$$\Phi^{\subseteq}(M) := \bigwedge \{\Phi(M') | M \subseteq M'\}.$$

Offenbar $\Phi^{\subseteq}(M) \subseteq \Phi(M)$ und $\Phi^{\subseteq}$ monoton — und zwar aus syntaktischen Gründen (das Argument steht nur an nicht-strikt positiver Stelle).

Vergleiche das mit $\liminf_{k\to\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$.

Offenbar auch: $\Phi^{\subseteq} \supseteq \Phi \Leftrightarrow \Phi$ monoton.

$\Phi^{\subseteq}(M) = \{x | \forall M'.M \subseteq M' \Rightarrow x \in \Phi(M')\}$.

Das entspricht einer Transformation von $\lambda\alpha\rho$ nach $\lambda\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \rho[\alpha := \beta]$ (informelle modifizierte Realisierbarkeit).

Abgeleitete Regeln für $\mu\Phi^{\subseteq}$. Man formt schlicht die Regeln für $\mu\Phi^{\subseteq}$ statt $\mu\Phi$ (hier jeweils (μ-E$^+$) weggelassen) etwas um.

(μ-I) wird zu $(\forall M'.\mu\Phi^{\subseteq} \subseteq M' \Rightarrow x \in \Phi(M')) \Rightarrow x \in \mu\Phi^{\subseteq}$.

Dazu gehört der Typ $(\forall\alpha.(\mu\alpha\rho \to \alpha) \to \rho) \to \mu\alpha\rho$.

(μ-E) wird zu
$\Big(\forall x\Big(\forall M'.M \subseteq M' \Rightarrow x \in \Phi(M')\Big) \Rightarrow x \in M\Big) \Rightarrow \mu\Phi^{\subseteq} \subseteq M$.

Das entspricht $\Big(\big(\forall\alpha.(\sigma \to \alpha) \to \rho\big) \to \sigma\Big) \to \mu\alpha\rho \to \sigma$.

Bilde nun ein Termsystem, in dem diese Regeln direkt zur Verfügung stehen, d. h. in dem die neuen Regeln für beliebiges Φ statt der konkreten $\Phi^{\subseteq}$ angesetzt und dann übertragen werden:

- Wenn $t : \forall\alpha.(\mu\alpha\rho \to \alpha) \to \rho$, dann $\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t : \mu\alpha\rho$.
- Wenn $r : \mu\alpha\rho$ und $s : \Big(\forall\alpha.(\sigma \to \alpha) \to \rho\Big) \to \sigma$, dann $r\mathrm{E}_\mu s : \sigma$.

Und die Reduktion? $(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t)\mathrm{E}_\mu s$ habe als Redukt das Redukt der zugehörigen Übersetzung via $\mu\alpha\rho \mapsto \mu\alpha\forall\beta(\alpha \to \beta) \to \rho[\alpha := \beta]$. Dies ergibt einen unverschränkten positiven Typen, also auch ein Redukt.

Nun der Clou: Wenn Φ monoton ist, dann ist $\Phi^{\subseteq} = \Phi$, also die alten Regeln aus den neuen Regeln ableitbar (trivialerweise, weil für $\Phi^{\subseteq}$ nur Äquivalenzumformungen gemacht wurden). Wir können aber sogar das **Termersetzungssystem** monotoner induktiver Typen in das neue System einbetten! Der Grund: Ableitung der alten Regeln aus den neuen braucht gerade nur dort die Monotonie, wo wir auch einen Monotoniezeugen zur Hand haben. Daß sogar Reduktion erhalten bleibt, sollte kein Zufall sein. Das verdient weiteres Studium. Festzuhalten bleibt: Im Verband wirkt es trivial, für induktive Typen bewirkt es den Kollaps monotoner induktiver Typen auf unverschränkte positive induktive Typen (System F erweiternd).

Finis