Slide 1

Monotone induktive Typen

Ralph Matthes[a], LMU München

Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
im September 1999 an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz,
Sektion 16: Logik/Theoretische Informatik

[a] `matthes@informatik.uni-muenchen.de`,
Homepage: `http://www.tcs.informatik.uni-muenchen.de/~matthes/`

Slide 2

Der Abstract:

Der Fixpunktsatz von Tarski sichert die Existenz eines kleinsten Fixpunktes für beliebige monotone Abbildungen eines vollständigen Verbandes in sich. Dennoch werden Untersuchungen zu Lambdakalkülen mit Ausdrucksmitteln für kleinste Fixpunkte von Abbildungen der Form $\alpha \mapsto \rho$, d. h. mit Typen der Form $\mu\alpha\rho$, auf solche $\mu\alpha\rho$ eingeschränkt, in denen α nur positiv in ρ vorkommt, also eine gerade Anzahl Male links vom Implikationspfeil (oder gar nur strikt positiv, also nicht links vom Pfeil). Weiter wird zumeist keine Verschränkung erlaubt in dem Sinne, daß der Typ ρ seinerseits nicht mithilfe eines $\mu\alpha'\rho'$ gebildet sein darf, wo (das äußere) α in ρ' frei vorkommt. Schließlich wird in der Regel nicht erkannt, daß sich primitive Rekursion über induktiven Typen zwar durch Iteration kodieren läßt, diese Kodierung aber nicht das gewünschte Reduktionsverhalten hat. In dem Vortrag werden Erweiterungen von Girards System F um monotone induktive Typen dargestellt, die alle obigen Einschränkungen überwinden. Monotonie wird ausgedrückt durch die Aufnahme eines Monotoniezeugen in die Einführungs- oder Beseitigungsregel für $\mu\alpha\rho$: schlicht eines (nicht notwendig geschlossenen) Terms vom Typ $\forall\alpha\forall\alpha'.(\alpha \to \alpha') \to \rho \to \rho[\alpha := \alpha']$. Es wird gezeigt, daß sich diese Systeme reduktionserhaltend in solche mit nur unverschränkten positiven induktiven Typen einbetten, woraus starke Normalisierung folgt.

Slide 3

Tarskis Fixpunktsatz (1939, publiziert 1955)
Gegeben: $(U, \subseteq, \wedge, \vee)$ vollständiger Verband von Mengen mit Mengeninklusion $\subseteq$ und monotones $\Phi : U \to U$.
Definiere

$$\mu\Phi := \bigwedge\{M|\Phi(M) \subseteq M\} \qquad \text{(Infimum der Präfixpunkte).}$$

Dann ist $\mu\Phi$ ein Präfixpunkt von Φ, d. h. $\Phi(\mu\Phi) \subseteq \mu\Phi \qquad (\mu\text{-I})$.

($\mu\Phi$ ist sogar Fixpunkt.)
Sprechweise: $\mu\Phi$ ist mittels des „Operators" Φ induktiv erzeugt.

Nach Definition gilt für jedes M: $\Phi(M) \subseteq M \Rightarrow \mu\Phi \subseteq M \qquad (\mu\text{-E})$.

(μ-E) ist das Induktionsprinzip.

Slide 4

Beispiel $U := \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit mengentheoretischen Verbandsoperationen (Schnitt und Vereinigung).

$$\Phi(M) := \{0\} \cup \{r + 1|r \in M\}.$$

Setze $\mathbb{N} := \mu\Phi$.
Ziel: Zeige $r \in \mathbb{N} \Rightarrow r^2 \in \mathbb{N}$ mittels Induktion.
Dazu $M := \{r|r^2 \in \mathbb{N}\}$. Also genügt $\Phi(M) \subseteq M$. 0 geht klar.
Sei $r \in M$. Zeige $r + 1 \in M$, d. h. $(r + 1)^2 = r^2 + r + r + 1 \in \mathbb{N}$.
Scheitert: Es ist nicht bekannt, daß $r \in \mathbb{N}$.

Ausweg Betrachte $M' := \mathbb{N} \cap M$ und zeige $\Phi(M') \subseteq M$, denn dann dank Tarskis Satz — schlicht der Regel (μ-I) — und Φs Monotonie auch $\Phi(M') \subseteq M'$, also $\mathbb{N} \subseteq M' \subseteq M$.

Slide 5

(Meist setzen Mathematiker gleich intuitiv den Schnitt mit der induktiv definierten Menge an. Dies zumeist auch dann, wenn er unnötig ist. Für uns ist die Unterscheidung wichtig.)

Nun wieder allgemein: Leicht erhält man aus (μ-I), (μ-E) und Φs Monotonie folgende abgeleitete Regel der „erweiterten Induktion“ für alle M: $\Phi(\mu\Phi \wedge M) \subseteq M \Rightarrow \mu\Phi \subseteq M \qquad (\mu\text{-E}^+)$.

Das war klassisch argumentiert ohne jeden „Zeugen“ dafür, warum die Inklusion $\subseteq$ zutrifft. „Zeugen“ sind gerade das, was die Kategorientheorie (i. S. v. Eilenberg und Mac Lane, erstmals publiziert 1942) der Theorie der partiellen Ordnungen „voraus hat“.

Slide 6

Kategorie

- Objekte
- Morphismen zwischen je zwei Objekten
- Komposition von Morphismen
- einige Eigenschaften

Falls es von A nach B immer höchstens einen Morphismus gibt, dann reduziert sich das alles auf eine partielle (also reflexive und transitive) Ordnung der Objekte.

Slide 7

Funktor

- Abbildung von einer Kategorie in eine Kategorie
- wirft Objekte auf Objekte und Morphismen auf Morphismen
- einige Verträglichkeitsbedingungen

Im Fall der Ordnung bedeutet das bloß Monotonie.

Statt kleinster Präfixpunkte monotoner Operatoren betrachten wir nun allgemein initiale Algebren bzgl. Endofunktoren.

Slide 8

Initiale Algebra Sei F Funktor von einer Kategorie in dieselbe. Initiale F-Algebra ist ein Paar (M, c) mit

- M ist Objekt der Kategorie
- c ist Morphismus von $F(M)$ nach M

und: Ist (S, s) irgendeine F-Algebra,
d. h. S Objekt und s Morphismus von $F(S)$ nach S,
so gibt es genau einen Morphismus Es von M nach S mit
$Es \circ c = s \circ F(Es)$ („=“ gilt immer für partielle Ordnungen!).

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "F(Es)"'] & M \arrow[d, "Es"] \\ F(S) \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

Beachte: c von $F(M)$ nach M entspricht unserem (μ-I).

Slide 9

Ziel Studiere konstruktive Aspekte kleinster Präfixpunkte mittels Termersetzungssystemen, die initiale Algebren modellieren.

- Morphismen und Komposition funktional
- Lambda-Kalkül als Basisformalismus für Funktionen/Funktionale
- Objekte sind nun Typen: Zeichenketten, aufgebaut aus Variablenzeichen und Typbildnern, v. a. $\to$.
- Hat man Typen ρ und σ, so ist auch $\rho \to \sigma$ ein Typ: gedacht als der Typ der Funktionen von ρ nach σ, d. h. der Funktionale, deren Argumente Typ ρ haben und deren Resultate den Typ σ.
- „Funktionale“, da die Argumente schon Funktionen (oder gar Funktionale) sein dürfen.

Slide 10

- Morphismen zwischen Objekten: nun „Terme“ vom Typ $\rho \to \sigma$, wobei Terme (für beliebige Typen) für Funktionale ihres Typs stehen:
- Definition der Terme: Es gibt
  - getypte Variablen x^ρ
  - Lambda-Abstraktion $\lambda x^\rho r^\sigma : \rho \to \sigma$ (für r bereits Term vom Typ σ).
  - Anwendung $r^{\rho\to\sigma} s^\rho : \sigma$: r hat als Argumenttyp den Typ σ von s. Also wohlgetypt!

Slide 11

Das System ist tot. Leben entsteht durch Termersetzung.

Bei uns zunächst Beta-Reduktion für $\to$: $(\lambda x r)s \mapsto r[x := s]$

Altbekannt: Für den einfach getypten Lambda-Kalkül (wie beschrieben) gibt es keine unendlichen Reduktionsfolgen: „starke Normalisierung".

Wahlmöglichkeiten spielen keine Rolle, da verschiedene Redukte durch weitere Reduktion wieder zusammengebracht werden können: „Konfluenz"

Folge: Die durch Termersetzung erzeugte Gleichheit ist entscheidbar.

Slide 12

Induktive Typen Fixiere Typ ρ und Typvariable α. Statt eines Objekts M wird der induktive Typ $\mu\alpha\rho$ postuliert. Interpretation: kleinster Präfixpunkt von $\alpha \mapsto \rho$. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\rho[\alpha := \mu\alpha\rho] \arrow[r, "\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}\,."] \arrow[d, swap, "(\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s)"] & \mu\alpha\rho \arrow[d, ".\mathrm{E}_\mu s"] \\
\rho[\alpha := \sigma] \arrow[r, swap, "s"] & \sigma
\end{tikzcd}$$

Der Morphismus der initialen Algebra wird zur Termerzeugungsregel: Ist t ein Term vom Typ $\rho[\alpha := \mu\alpha\rho]$, dann $\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t$ ein Term vom Typ $\mu\alpha\rho$. Wir modellieren nur schwache Initialität. Dazu eine Termerzeugungsregel und eine Termersetzungsregel: Ist s ein Term vom Typ $\rho[\alpha := \sigma] \to \sigma$ und r vom Typ $\mu\alpha\rho$, dann $r\mathrm{E}_\mu s$ vom Typ σ, und

$$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t^{\rho[\alpha:=\mu\alpha\rho]})\mathrm{E}_\mu s \mapsto s\Big((\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s)t\Big).$$

Slide 13

Welcher Term ist $(\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s)$? Er entspricht der Anwendung des Funktors auf den Morphismus und muß $\rho[\alpha := \mu\alpha\rho] \to \rho[\alpha := \sigma]$ als Typ haben.

Beispiele $\mathrm{nat} := \mu\alpha.1 + \alpha$. (1 modelliere einen Singleton und $\rho + \sigma$ die disjunkte Vereinigung von ρ und σ.) s kodiert dann den Anfang und den Schritt zusammen. $\mathrm{C}_{\mathrm{nat}}$ kodiert Null und Nachfolger zusammen. Der fragliche Term muß also den Konstruktor wieder zerlegen und Anfang und Schritt (in ihrer Kodierung) übergeben.

$\mathrm{cont} := \mu\alpha.1 + ((\alpha \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{nat})$. Ignoriere die Aufgaben von eben: Man hat Konstruktoren $D : \mathrm{cont}$, $C : ((\mathrm{cont} \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{cont}$. Wir wünschen uns einen Term $e : \mathrm{cont} \to \mathrm{nat}$ mit $eD = 0$ und $e(Cf) = fe$ für alle f. In der Tat ist das Iteration. Späteres Resultat: Als Termersetzungssystem ist diese Definition terminierend.

Slide 14

ρ-verzweigte fundierte Bäume: $\mathrm{tree}(\rho) := \mu\beta.1 + (\rho \to \beta)$.

Stark verzweigte fundierte Bäume nach U. Berger:

$$\mu\alpha.1 + (\mathrm{tree}(\alpha) \to \alpha),$$

ein verschränkter nicht-strikt positiver induktiver Typ.

Wohlbekannt: Bildet man $\mu\alpha\rho$ nur für α nur positiv in ρ, so gibt es geschlossene Terme $\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\tau_1,\tau_2}$ vom Typ $(\tau_1 \to \tau_2) \to \rho[\tau_1] \to \rho[\tau_2]$. Dann können wir setzen:

$$(\lambda\alpha\rho)(.\mathrm{E}_\mu s) := \mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\mu\alpha\rho,\sigma}(\lambda x^{\mu\alpha\rho}.x\mathrm{E}_\mu s).$$

Satz Dieses Termersetzungssystem ist stark normalisierend.

Beweis: reduktionserhaltende Einbettung in Girards System F.

Slide 15

Girards F (1972) ist der polymorphe Lambda-Kalkül. Wir haben Alltypen, d. h. für jeden Typ ρ und jede Typvariable α bilden wir den Typ $\forall\alpha\rho$.

Dazu zwei neue Termregeln:

- Ist r Term vom Typ ρ, so $\Lambda\alpha r$ ein Term vom Typ $\forall\alpha\rho$, falls α nicht frei im Typ einer in r freien Variablen ist (motiviert durch den Curry-Howard-Isomorphismus).
- Ist r vom Typ $\forall\alpha\rho$, so $r\sigma$ ein Term vom Typ $\rho[\alpha := \sigma]$.

Die zusätzliche Termersetzungsregel: $(\Lambda\alpha r)\sigma \mapsto r[\alpha := \sigma]$.

Girard bewies Normalisierung für F. Seither zahllose Beweise sogar von starker Normalisierung. Sie sind inhärent schwer zu führen, da sie die Arithmetik zweiter Stufe übersteigen.

Slide 16

Einbettung sei eine Übersetzung eines Termersetzungssystems in ein zweites, bei dem die Typen und die Terme verträglich übersetzt werden so, daß gilt: $r \to_{\text{Quelle}} s \Rightarrow r' \to^{+}_{\text{Ziel}} s'$, also ein Schritt in mindestens einen Schritt übersetzt wird.

Ist das Zielsystem stark normalisierend, so ist es auch das Ausgangssystem. Die Übersetzung unserer induktiven Typen folgt der üblichen Methode in polymorphen Systemen.

Volle primitive Rekursion ist mehr als Iteration. Sie entspricht genau der „erweiterten Induktion“, die abgeleitet war. Die Ableitung läßt sich im Termkalkül nachbilden, hat aber ein unerwünschtes Reduktionsverhalten. Es gibt in System F keine rechnerisch überzeugende Vorgängerfunktion für (passend kodierte) Zahlen (siehe Spławski/Urzyczyn). Daher nun Hinzunahme der „erweiterten Induktion“ $\Phi(\mu\Phi \wedge M) \subseteq M \Rightarrow \mu\Phi \subseteq M$ als Basisregel.

Slide 17

Die Infimumbildung in (μ-E$^+$) wird durch ein kategorielles Produkt bzw. durch Produkttypen dargestellt.

Statt nur initialer F-Algebra nun auch eine initiale rekursive F-Algebra: Zusätzlich muß es zu S Objekt und s Morphismus von $F(M \times S)$ nach S genau einen Morphismus $E^+ s$ von M nach S geben mit $E^+ s \circ c = s \circ F(\langle \mathrm{Id}, E^+ s\rangle)$.

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "F(\langle \mathrm{Id}, E^+ s\rangle)"'] & M \arrow[d, "E^+ s"] \\ F(M \times S) \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

Slide 18

Auf der Termebene ergibt das eine Termbildungsregel: $r : \mu\alpha\rho$ und $s : \rho[\alpha := \mu\alpha\rho \times \sigma] \to \sigma$ formen $r\mathrm{E}_\mu^+ s : \sigma$.

Die Regel kommt aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \rho[\alpha := \mu\alpha\rho] \arrow[r, "\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}\cdot"] \arrow[d, "(\lambda\alpha\rho)(\langle \mathrm{Id}, .\mathrm{E}_\mu^+ s\rangle)"'] & \mu\alpha\rho \arrow[d, ".\mathrm{E}_\mu^+ s"] \\ \rho[\alpha := \mu\alpha\rho \times \sigma] \arrow[r, "s"'] & \sigma \end{tikzcd}$$

Wenn wir uns weiter auf positive induktive Typen einschränken, können wir gleich setzen

$$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho} t)\mathrm{E}_\mu^+ s \mapsto s\Big(\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho, \mu\alpha\rho, \mu\alpha\rho\times\sigma}\Big(\lambda x^{\mu\alpha\rho}.\langle x, (\lambda x^{\mu\alpha\rho}.x\mathrm{E}_\mu^+ s)x\rangle\Big)t\Big)$$

Satz Mein System ist stark normalisierend.

Beweis: z. B. Erweiterung eines passenden Beweises für System F.

Slide 19

Am besten gleich System F mit aufnehmen. Dort sind geschlossene Terme $\Lambda\alpha\Lambda\beta.\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho,\alpha,\beta} : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha\to\beta)\to\rho\to\rho[\alpha:=\beta]$. Sie bezeugen offenkundig die durch ihren Typ ausgedrückte Monotonie von $\lambda\alpha\rho$. Und die kommt von der syntaktischen Forderung der Positivität.

Zentrale Idee Es kommt für die starke Normalisierung der Systeme induktiver Typen nicht auf die konkrete Definition solcher Monotoniezeugen an.

Er muß nicht einmal geschlossen sein: bedingte Monotonie.

Der Zeuge darf sogar eine Variable sein: hypothetische Monotonie.

Nur müssen diese Zeugen dann in den Termbildungsregeln auftauchen, damit die Reduktionsregel auf sie zugreifen kann (beigegebene Monotoniezeugen).

Slide 20

Ein System monotoner induktiver Typen

- Bilde $\mu\alpha\rho$ uneingeschränkt.
- Ändere die Konstruktionsregel zu: Wenn $t : \rho[\alpha:=\mu\alpha\rho]$ und $m : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha\to\beta)\to\rho\to\rho[\alpha:=\beta]$, dann $\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}mt : \mu\alpha\rho$.
- Behalte die anderen Termbildungsregeln bei.
- Ersetze in den beiden(!) Reduktionsregeln map durch m, angewandt auf den zweiten und dritten Index von map.

Satz Dieses System ist stark normalisierend.

Beweis: ohne (μ-E^+) durch Einbettung in F, sonst z. B. durch kunstvolle Erweiterung eines geeigneten Beweises für F.

Normalisierung ist nicht selbstverständlich. Dies ist schon durch Iteration belegbar: Belasse die alte Konstruktionsregel, aber gib Zeugen einer abgeschwächten Monotonie zur Termbildungsregel für Iteration. Zur Auswahl stehen

$$m : \forall\beta.(\mu\alpha\rho \to \beta) \to \rho[\alpha := \mu\alpha\rho] \to \rho[\alpha := \beta] \qquad \text{und}$$

Slide 21

$$m : \forall\alpha.(\alpha \to \sigma) \to \rho \to \rho[\alpha := \sigma].$$

Beide Male ist eine Variante der Reduktionsregel trotz der Abschwächung leicht anzugeben (sonst wird ja auch immer der erste Typ auf $\mu\alpha\rho$ und der zweite auf σ gesetzt).

Lemma Eines der Systeme ist stark normalisierend, das andere nicht einmal schwach.

Beweis: Wieder eine geschickte Variante im positiven Fall, ein Gegenbeispiel im negativen Fall.

Der erste Fall ist negativ.

Setze $\rho := \alpha$, wähle t und σ beliebig und $s := \lambda y^\sigma y$.

$$m := \Lambda\beta\lambda z^{\mu\alpha\alpha\to\beta}\lambda u^{\mu\alpha\alpha}.z(\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}u).$$

Slide 22

Es ist sogar ein geschlossener Zeuge. Würde man $\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}$ weglassen, wäre das der kanonische Monotoniezeuge, der nicht die Spezialität des ersten Arguments ausnutzt.

$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}t)\mathrm{E}_\mu ms$ reduziert in zwei Schritten zu $m\sigma(\lambda x^{\mu\alpha\alpha}.x\mathrm{E}_\mu ms)t$ und weiter in drei Schritten zu $(\lambda x^{\mu\alpha\alpha}.x\mathrm{E}_\mu ms)(\mathrm{C}_{\mu\alpha\alpha}t)$, also in insgesamt sechs Schritten zum Ausgangsterm. So kommt man in eine unendliche Schleife, die man durch eine andere Strategie nicht vermeiden kann.

Slide 23

Hauptsatz (Kollaps)
Das System der monotonen induktiven Typen mit voller primitiver Rekursion und Iteration läßt sich einbetten in die Erweiterung von System F um unverschränkte positive induktive Typen mit voller primitiver Rekursion.

Da dies umgekehrt in einfacher Weise auch geht, sind die Systeme äquivalent bzgl. Reduktionen, also intensional äquivalent.

Beweis: Mittels einer erstaunlich einfachen Transformation.

Slide 24

Positivierungen Sei $m : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \rho \to \rho[\alpha := \beta]$. Relativ zu den freien Variablen von m ist ρ monoton in α. Definiere

$$\rho_\forall := \forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \rho[\alpha := \beta] \quad \text{und}$$

$$\rho_\exists := \exists\beta.(\beta \to \alpha) \times \rho[\alpha := \beta].$$

Beide sind positiv in α ($\rho_\exists$ sogar strikt positiv).
ρ ist minimallogisch äquivalent zu $\rho_\forall$ und $\rho_\exists$ (relativ zu den freien Variablen von m).
Dazu definiere für $Q \in \{\forall, \exists\}$ die Terme $p_Q : \rho \to \rho_Q$ und $q_Q : \rho_Q \to \rho$ mit freien Variablen höchstens die von m:
$p_\forall := \lambda x^\rho \Lambda\beta\lambda y^{\alpha\to\beta}.m\alpha\beta y x$
$q_\forall := \lambda x^{\rho_\forall}.x\alpha(\lambda y^\alpha y)$ (ohne m)
$p_\exists := \lambda x^\rho.\mathrm{C}_{\rho_\exists,\alpha}\langle\lambda y^\alpha y, x\rangle$ (ohne m)
$q_\exists := \lambda x^{\rho_\exists}.x\mathrm{E}_\exists(\Lambda\beta\lambda y^{(\beta\to\alpha)\times\rho[\alpha:=\beta]}.m\beta\alpha(y\mathrm{L})(y\mathrm{R}))$
Es gilt: $q_Q \circ p_Q \to^*_\beta \lambda x^\rho.m\alpha\alpha(\lambda y^\alpha y)x$ (aber keine Isomorphie!)

Slide 25

Beweis des Hauptsatzes mittels $\rho_\forall$: Übersetze die Typen des Systems monotoner induktiver Typen in die unverschränkten positiven induktiven Typen. Einzig nicht-homomorpher Fall:

$$(\mu\alpha\rho)' := \mu\alpha.(\rho')_\forall.$$

Übersetzung der Terme homomorph bis auf:
$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho} mt)' := \mathrm{C}_{(\mu\alpha\rho)'}\hat{t}$ mit $\hat{t}$ wie folgt. Zuvor hat man $t' : \rho'[\alpha := (\mu\alpha\rho)']$, also $\hat{t} := p'_\forall[\alpha := (\mu\alpha\rho)']t' : \rho'_\forall[\alpha := (\mu\alpha\rho)']$.
$(r\mathrm{E}_\mu s)' := r'\mathrm{E}_\mu \hat{s}$ mit $\hat{s}$ wie folgt. Zuvor hat man $s' : \rho'[\alpha := \sigma'] \to \sigma'$, also $\hat{s} := \lambda z^{\rho'_\forall[\alpha:=\sigma']}.s'(q'_\forall[\alpha := \sigma']z) : \rho'_\forall[\alpha := \sigma'] \to \sigma'$.
Beachte: $\hat{t}$ greift auf m' zu (via $p'_\forall$) und $\hat{s}$ kommt ohne m' aus.
Deswegen läßt sich die Übersetzung nicht mit $\rho_\exists$ definieren! (Wohl aber für das entsprechende System mit Monotoniezeugen in den Eliminationsregeln.)

Slide 26

Sogar eine Einbettung Dazu ein Lemma (h sei λ-Abstraktion):

$$q_Q[\alpha := \gamma](\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho_Q,\alpha,\gamma} h(p_Q x^\rho)) \to^*_\beta m\alpha\gamma h x$$

Beweis: einfaches Rechnen, beachte
$\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho_\forall,\alpha,\gamma} = \lambda f^{\alpha\to\gamma}\lambda x^{\rho_\forall}\Lambda\beta\lambda y^{\gamma\to\beta}.x\beta(\lambda z^\alpha.y(fz))$ und
$\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho_\exists,\alpha,\gamma} =$
$\lambda f^{\alpha\to\gamma}\lambda x^{\rho_\exists}.x\mathrm{E}_\exists(\Lambda\beta\lambda y^{(\beta\to\alpha)\times\rho[\alpha:=\beta]}.\mathrm{C}_{\rho_\exists[\alpha:=\gamma],\beta}\langle\lambda z^\beta.f(y\mathrm{L}z), y\mathrm{R}\rangle$.
Damit rechnet man nun leicht nach, daß

$$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho} mt\mathrm{E}_\mu s)' \to^+ \Big(s(m(\mu\alpha\rho)\sigma(\lambda x^{\mu\alpha\rho}.x\mathrm{E}_\mu s)t)\Big)'.$$

(Benutze dazu die Einbettung bereits für Teilterme und einige Verträglichkeits- und Substitutionslemmata.)
Ganz genauso geht es für die (volle) primitive Rekursion.

Slide 27

Braucht man die Mittel von System F für eine Reduktion von monotonen induktiven Typen auf positive induktive Typen? Nicht unbedingt.

$\rho_\forall$ und $\rho_\exists$ verwenden die Quantoren essentiell, nicht aber die Monotoniezeugen $m : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \rho \to \rho[\alpha := \beta]$.

Beispiel (U. Berger): $\rho := (\underbrace{((\alpha \to \tau) \to \alpha) \to \alpha}_{\text{Peirce-Formel}}) \to \alpha$ ist nicht positiv (vorletztes α). Man findet $\underline{m}_{\alpha,\beta} : \rho[\alpha := \beta]$ mit freien Variablen unter $f : \alpha \to \beta$ und $x : \rho$. Also läßt sich $\mu\alpha\rho$ sinnvoll bilden mit Iterationsregel

$$(\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}t)\mathrm{E}_\mu s \mapsto s(\underline{m}_{\alpha,\beta}[\alpha := \mu\alpha\rho, \beta := \sigma, f := \lambda x^{\mu\alpha\rho}.x\mathrm{E}_\mu s, x := t])$$

Gibt es ein positives ρ_+, um diese Reduktion in die für $\mu\alpha\rho_+$ einzubetten?

Slide 28

Ja. T. Altenkirch zog aus K. Schüttes Interpolationstheorem mit Verfeinerung à la Lyndon die Positivierung $\rho_+ := (\alpha \to \tau) \to \alpha$. Man findet leicht $p_+ := \lambda x^\rho \lambda y^{\alpha\to\tau}.x(\lambda z^{\rho_+}.zy) : \rho \to \rho_+$ und $q_+ := \lambda x^{\rho_+} \lambda y^{((\alpha\to\tau)\to\alpha)\to\alpha}.yx : \rho_+ \to \rho$.

$\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho_+,\alpha,\beta} = \lambda f^{\alpha\to\beta}\lambda x^{\rho_+}\lambda y^{\beta\to\tau}.f(x(\lambda z^\alpha.y(fz)))$

Es gilt eine Variante des vorigen Lemmas:

$$q_+[\alpha := \beta](\mathrm{map}_{\lambda\alpha\rho_+,\alpha,\beta} f(p_+x)) \to^* \underline{m}_{\alpha,\beta}.$$

Wie zuvor ergibt sich die Einbettung.

Altenkirch zeigt, daß es für **geschlossene** m immer eine Positivierung gibt. Offene Frage: Gilt auch das Lemma, das die **Einbettung** garantiert? Wenn ja, dann würden auch ohne die Mittel von System F monotone induktive Typen (aber nur mit geschlossenen Monotoniezeugen) in die positiven induktiven Typen kollabiert.

Finis