Standardisierung und permutative Konversionen

Felix Joachimski[a] und Ralph Matthes[b], LMU München

Arbeitstagung Bern - München im Juni 1998 in Bern

[a] joachski@rz.mathematik.uni-muenchen.de

[b] matthes@informatik.uni-muenchen.de, verantwortlich für alle Fehler auf den Folien

Definiere die Relation $\rightsquigarrow$ zwischen ungetypten Lambda-Termen induktiv durch

- $\vec{r} \rightsquigarrow \vec{r'} \Rightarrow x\vec{r} \rightsquigarrow x\vec{r'}$
- $r \rightsquigarrow r' \wedge \vec{s} \rightsquigarrow \vec{s'} \Rightarrow (\lambda x r)\vec{s} \rightsquigarrow (\lambda x r')\vec{s'}$
- $r[x := s]\vec{s} \rightsquigarrow t \Rightarrow (\lambda x r) s \vec{s} \rightsquigarrow t$

$\rightsquigarrow$ ist reflexiv (Induktion über Kopfgestalten; 3. Regel unnötig).

Lemma 1 $r \rightsquigarrow r' \wedge s \rightsquigarrow s' \Rightarrow rs \rightsquigarrow r's'$.

Beweis durch Induktion über $r \rightsquigarrow r'$ (IV nur für die dritte Regel benötigt).

Es gilt $(\lambda x r)s \rightsquigarrow r[x := s]$, also $\rightarrow \subseteq \rightsquigarrow$ (Induktion über $\rightarrow$).

Offenbar $\rightsquigarrow \subseteq \rightarrow^*$ (Induktion über $\rightsquigarrow$).

Definition der Standard-Reduktionssequenz $SEQ(r \rightsquigarrow r')$ durch Rekursion über die Herleitung von $r \rightsquigarrow r'$ (nicht Rekursion über $r \rightsquigarrow r'$, da $\rightsquigarrow$ nicht deterministisch ist):

- $$\begin{aligned} SEQ(x\vec{r} \rightsquigarrow x\vec{r'}) := {} & xSEQ(r_1 \rightsquigarrow r'_1)r_2 \dots r_n \oplus \dots \\ & \dots \oplus xr'_1 \dots r'_{n-1}SEQ(r_n \rightsquigarrow r'_n) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} SEQ((\lambda xr)\vec{s} \rightsquigarrow (\lambda xr')\vec{s'}) := {} & (\lambda x.SEQ(r \rightsquigarrow r'))s_1 \dots s_n \oplus \\ & (\lambda xr')SEQ(s_1 \rightsquigarrow s'_1)s_2 \dots s_n \oplus \dots \\ & \dots \oplus (\lambda xr')s'_1 \dots s'_{n-1}SEQ(s_n \rightsquigarrow s'_n) \end{aligned}$$
- $SEQ((\lambda xr)s\vec{s} \rightsquigarrow t) := ((\lambda xr)s\vec{s}, SEQ(r[x := s]\vec{s} \rightsquigarrow t))$

Lemma 2 $SEQ(r \rightsquigarrow r')$ ist eine Standard-Reduktionsfolge von r nach r', d. h. die Redexe werden (in der Zeichenkettenrepräsentation von Termen) von links nach rechts bearbeitet, wobei Überspringen von Redexen erlaubt ist (Beweis durch Induktion über $\rightsquigarrow$).

Satz Wenn $r \to^* r'$, dann gibt es eine Standard-Reduktionsfolge von r nach r'.

Beweis: Zu zeigen bleibt $\to^* \subseteq \rightsquigarrow$.

Zunächst **Lemma 3** $r \rightsquigarrow r' \wedge s \rightsquigarrow s' \Rightarrow r[x := s] \rightsquigarrow r'[x := s']$.

Beweis: Induktion über $r \rightsquigarrow r'$. (Im Fall $x\vec{r} \rightsquigarrow x\vec{r}'$—also dieselbe Variable x—wird mehrfach Lemma 2 gebraucht.)

Lemma 4 $r \rightsquigarrow r' \to r'' \Rightarrow r \rightsquigarrow r''$

Beweis: Induktion über $\rightsquigarrow$. Hauptfall $(\lambda x r)\vec{s} \rightsquigarrow (\lambda x r')\vec{s}'$. Innere Reduktionen klar nach IV. Äußere Reduktion: $\vec{s} = s_0, \vec{s}_+$; $\vec{s}' = s_0', \vec{s}_+'$ und Redukt $r'[x := s_0']\vec{s}_+'$. Nach Lemma 3 $r[x := s_0] \rightsquigarrow r'[x := s_0']$, also $(\lambda x r)s_0 \rightsquigarrow r'[x := s_0']$, also nach Lemma 2 (mehrfach) $(\lambda x r)s_0\vec{s}_+ \rightsquigarrow r'[x := s_0']\vec{s}_+'$.

Korollar $r \to^* r' \Rightarrow r \rightsquigarrow r'$. Beweis: Ind. über die Länge von $r \to^* r'$.

Definition von WN (angepeilter Satz: WN sind die schwach normalisierenden Terme) durch

- $\vec{r} \subseteq WN \Rightarrow x\vec{r} \in WN$
- $r \in WN \Rightarrow \lambda xr \in WN$
- $r[x := s]\vec{s} \in WN \Rightarrow (\lambda xr)s\vec{s} \in WN$

Definition von NF (Terme in Normalform) durch

- $\vec{r} \subseteq NF \Rightarrow x\vec{r} \in NF$
- $r \in NF \Rightarrow \lambda xr \in NF$

Definition von $\rightsquigarrow^-$ durch Weglassen von $\vec{s}$ in der zweiten Klausel der Definition von $\rightsquigarrow$, weshalb offenbar $\rightsquigarrow^- \subseteq \rightsquigarrow$.

Also ist $\rightsquigarrow^-$ definiert durch

- $\vec{r} \rightsquigarrow^- \vec{r'} \Rightarrow x\vec{r} \rightsquigarrow^- x\vec{r'}$
- $r \rightsquigarrow^- r' \Rightarrow \lambda xr \rightsquigarrow^- \lambda xr'$
- $r[x := s]\vec{s} \rightsquigarrow^- t \Rightarrow (\lambda xr)s\vec{s} \rightsquigarrow^- t$

Lemma 5 $r \rightsquigarrow^- r' \Rightarrow r \in WN \wedge r' \in NF$

Beweis: Induktion über $\rightsquigarrow^-$.

Lemma 6 $r \in WN \Rightarrow \exists r'.r \rightsquigarrow^- r'$

Beweis: Induktion über WN.

Lemma 7 $r \rightsquigarrow r' \in NF \Rightarrow r \rightsquigarrow^- r'$

Beweis: Induktion über $\rightsquigarrow$.

(Es gilt sogar, daß die Herleitung von $r \rightsquigarrow r'$ nur Regeln von $\rightsquigarrow^-$ benutzt, also keine Transformation nötig ist.)

Satz WN ist die Menge wn der schwach normalisierenden Terme.

Beweis: „$WN \subseteq wn$“ Nach L. 6 gilt $r \rightsquigarrow^- r'$ für ein r'. Nach L. 5 ist $r' \in NF$. Wegen $\rightsquigarrow^- \subseteq \to^*$ folgt $r \in wn$.

„$wn \subseteq WN$“ Gelte $r \to^* r' \in NF$. Mit dem Korollar folgt $r \rightsquigarrow r' \in NF$. L. 7 ergibt $r \rightsquigarrow^- r'$ und schließlich L. 5 $r \in WN$.

Ziel ist es, diese Begriffe und Resultate auf den einfach getypten Lambda-Kalkül mit Pfeiltypen und Summentypen sowie permutativen Konversionen auszudehnen.

Die neuen Termklauseln sind:

- Falls r Term und $i \in \{0, 1\}$, dann $\mathrm{inj}_i r$ Term (Injektionen in die Summe).
- Falls r, s_0 und s_1 Terme, dann $r(x_0.s_0, x_1.s_1)$ Term (Fallunterscheidung nach r).

Die neuen Termersetzungsregeln:

- $(\mathrm{inj}_i r)(x_0.s_0, x_1.s_1) \mapsto s_i[x_i := r]$ (β-Reduktion für Summen)
- $r(x_0.s_0, x_1.s_1)S \mapsto r(x_0.s_0 S, x_1.s_1 S)$ (permutative Konversion)

Dabei steht S für eine allgemeine Elimination, also einen Term oder ein Gebilde der Form $(x_0.s_0, x_1.s_1)$.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß alle Terme wohlgetypt sind bzgl. des Systems der Pfeil- und Summentypen.

Definiere $\rightsquigarrow$ induktiv, wobei $(x_0.s_0, x_1.s_1) \rightsquigarrow (x_0.s_0', x_1.s_1')$ eine Abkürzung für $s_0 \rightsquigarrow s_0'$ und $s_1 \rightsquigarrow s_1'$ sei:

- $\vec{R} \rightsquigarrow \vec{R}' \Rightarrow x\vec{R} \rightsquigarrow x\vec{R}'$
- $r \rightsquigarrow r' \wedge \vec{S} \rightsquigarrow \vec{S}' \Rightarrow (\lambda xr)\vec{S} \rightsquigarrow (\lambda xr')\vec{S}' \wedge (\mathrm{inj}_i r)\vec{S} \rightsquigarrow (\mathrm{inj}_i r')\vec{S}'$
- $r[x := s]\vec{S} \rightsquigarrow t \Rightarrow (\lambda xr)s\vec{S} \rightsquigarrow t$
- $s_i[x_i := r]\vec{S} \rightsquigarrow t \Rightarrow (\mathrm{inj}_i r)(x_0.s_0, x_1.s_1)\vec{S} \rightsquigarrow t$
- $r(x_0.s_0 S, x_1.s_1 S)\vec{S} \rightsquigarrow t \Rightarrow r(x_0.s_0, x_1.s_1)S\vec{S} \rightsquigarrow t$

Reflexivität von $\rightsquigarrow$ folgt schon aus den ersten beiden Regeln.

Lemma 1' $r \rightsquigarrow r' \wedge S \rightsquigarrow S' \Rightarrow rS \rightsquigarrow r'S'$

Beweis: Induktion über $r \rightsquigarrow r'$ wie für Lemma 1 (die IV wird für die dritte bis fünfte Regel gebraucht).

Lemma $\rightsquigarrow \subseteq \to^*$ (ganz einfach durch Induktion)

Lemma 3' $r \rightsquigarrow r' \wedge s \rightsquigarrow s' \Rightarrow r[x := s] \rightsquigarrow r'[x := s']$.

Beweis wie für Lemma 3.

Lemma 4' $r \rightsquigarrow r' \to r'' \Rightarrow r \rightsquigarrow r''$

Beweis: Induktion über $\rightsquigarrow$. Neue Fälle: Regeln 4 und 5 völlig problemfrei. In den ersten beiden Regeln ist nun immer noch die permutative Konversion zu behandeln. Im neuen zweiten Fall der zweiten Regel geht der Fall der β-Reduktion für Summen genauso wie der Hauptfall von Lemma 4.

Korollar $r \to^* r' \Rightarrow r \rightsquigarrow r'$. Beweis: Ind. über die Länge von $r \to^* r'$.

Lemma Jeder Term hat genau eine der folgenden (Kopf-) Gestalten:

- $x\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)]$ ($[\ldots]$ steht für eine optionale Größe)
- $\lambda x r$
- $\mathrm{inj}_i r$
- $x\vec{r}(x_0.s_0, x_1.s_1)S\vec{S}$
- $(\lambda x r)s\vec{S}$
- $(\mathrm{inj}_i r)(x_0.s_0, x_1.s_1)\vec{S}$

Wegen der Typen müssen wir uns nicht mit $(\lambda x r)(x_0.s_0, x_1.s_1)\vec{S}$ oder $(\mathrm{inj}_i r)s\vec{S}$ befassen.

Definition von WN durch

- $\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)] \subseteq WN \Rightarrow x\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)] \in WN$
- $r \in WN \Rightarrow \lambda x r \in WN$
- $r \in WN \Rightarrow \mathrm{inj}_i r \in WN$
- $r[x := s]\vec{S} \in WN \Rightarrow (\lambda x r)s\vec{S} \in WN$
- $s_i[x_i := r]\vec{S} \in WN \Rightarrow (\mathrm{inj}_i r)(x_0.s_0, x_1.s_1)\vec{S} \in WN$
- $x\vec{r}(x_0.s_0 S, x_1.s_1 S)\vec{S} \in WN \Rightarrow x\vec{r}(x_0.s_0, x_1.s_1)S\vec{S} \in WN$

Dagegen werde NF (Terme mit Teilformeleigenschaft!) erzeugt aus

- $\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)] \subseteq NF \Rightarrow x\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)] \in NF$
- $r \in NF \Rightarrow \lambda x r \in NF \wedge \mathrm{inj}_i r \in NF$

Definiere wieder $\rightsquigarrow^-$ durch Beschränkung der Regeln für $\rightsquigarrow$:

- $\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)] \rightsquigarrow^- \vec{r}'[(x_0.s_0', x_1.s_1')]$
  $\Rightarrow x\vec{r}[(x_0.s_0, x_1.s_1)] \rightsquigarrow^- x\vec{r}'[(x_0.s_0', x_1.s_1')]$

- $r \rightsquigarrow^- r' \Rightarrow \lambda x r \rightsquigarrow^- \lambda x r' \wedge \mathrm{inj}_i r \rightsquigarrow^- \mathrm{inj}_i r'$

- $r[x := s]\vec{S} \rightsquigarrow^- t \Rightarrow (\lambda x r) s \vec{S} \rightsquigarrow^- t$

- $s_i[x_i := r]\vec{S} \rightsquigarrow^- t \Rightarrow (\mathrm{inj}_i r)(x_0.s_0, x_1.s_1)\vec{S} \rightsquigarrow^- t$

- $x\vec{r}(x_0.s_0 S, x_1.s_1 S)\vec{S} \rightsquigarrow^- t \Rightarrow x\vec{r}(x_0.s_0, x_1.s_1) S \vec{S} \rightsquigarrow^- t$

Offenbar sind die erste, zweite und fünfte Regel nun verschärft worden.

Lemma 5' $r \rightsquigarrow^- r' \Rightarrow r \in WN \wedge r' \in NF$

Beweis: Induktion über $\rightsquigarrow^-$.

Lemma 6' $r \in WN \Rightarrow \exists r'.r \rightsquigarrow^- r'$

Beweis: Induktion über WN.

Lemma 7' $r \rightsquigarrow r' \in NF \Rightarrow r \rightsquigarrow^- r'$

Beweis: Induktion über $\rightsquigarrow$.

Die Herleitung von $r \rightsquigarrow r'$ kann diesmal Regeln von $\rightsquigarrow^-$ benutzt haben, läßt sich aber in eine Herleitung von $r \rightsquigarrow^- r'$ transformieren. Dies wird erforderlich für die fünfte Klausel der Definition von $\rightsquigarrow$ (die Permutationsklausel), denn zu zeigen ist $r(x_0.s_0, x_1.s_1)S\vec{S} \rightsquigarrow^- t$ mit der IV $r(x_0.s_0S, x_1.s_1S)\vec{S} \rightsquigarrow^- t$. Das gelingt mithilfe einer Nebeninduktion (und Fallunterscheidung nach der Kopfgestalt von r) über $r(x_0.s_0S, x_1.s_1S)\vec{S} \in WN$, was durch Lemma 5' garantiert ist.

Wir erhalten wieder den

Satz WN ist die Menge wn der schwach normalisierenden Terme.

Beweis: (wörtlich wie für den ungetypten Lambda-Kalkül)
„$WN \subseteq wn$“ Nach L. 6’ gilt $r \rightsquigarrow^- r'$ für ein r'. Nach L. 5’ ist $r' \in NF$. Wegen $\rightsquigarrow^- \subseteq \to^*$ folgt $r \in wn$.

„$wn \subseteq WN$“ Gelte $r \to^* r' \in NF$. Mit dem Korollar folgt $r \rightsquigarrow r' \in NF$. L. 7’ ergibt $r \rightsquigarrow^- r'$ und schließlich L. 5’ $r \in WN$.