Cours M2 LPOTR, partie “logique du premier ordre”

—Exercices et solutions—

Andreas Herzig
Université de Toulouse et CNRS, IRIT
http://www.irit.fr/~Andreas.Herzig

octobre 2015

1 Le jeu de chifoumi : langage

Considérons un langage avec l’alphabet suivant :

- Les symboles de prédicat binaire gagne et perd
- Les variables d’objet x et y
- Les symboles de fonction 0-aires suivants : pierre, roche, feuille, papier, ciseaux
- Les connecteurs logiques de la logique des prédicats.

Question. Exprimer les phrases suivantes en logique des prédicats :

1. La feuile gagne contre la pierre.
   Solution : $\mathtt{gagne}(\mathtt{feuille},\mathtt{pierre})$
2. La feuile ne gagne pas contre elle-même.
   Solution : $\neg\mathtt{gagne}(\mathtt{feuille},\mathtt{feuille})$
3. Chaque objet ne peut ni gagner ni perdre contre lui-même.
   Solution : $\forall x(\neg\mathtt{gagne}(x,x)\land\neg\mathtt{perd}(x,x))$ *; ou bien :* $\neg\exists x(\mathtt{gagne}(x,x)\lor\mathtt{perd}(x,x))$
4. Il y a des objets contre lesquels la feuile gagne et il y a des objets contre lesquels la feuille perd.
   Solution : $(\exists x\mathtt{gagne}(\mathtt{feuille},x))\land\exists x\mathtt{perd}(\mathtt{feuille},x)$
5. Chaque objet peut gagner contre quelqu’un.
   Solution : $\forall x\exists y\mathtt{gagne}(x,y)$
6. Il existe un objet qui ne gagne contre aucun objet.
   Solution : $\exists x\forall y\neg\mathtt{gagne}(x,y)$
7. Tous les objets ont un objet contre lequel ils ne gagnent pas.
   Solution : $\forall x\exists y\neg\mathtt{gagne}(x,y)$
8. *Si* il existe un objet contre lequel tous les objets gagnent alors tout objet a un objet contre lequel il gagne.
   Solution : $\big(\exists y\forall x\mathtt{gagne}(x,y)\big)\to\forall x\exists y\mathtt{gagne}(x,y)$

2 Le jeu de chifoumi : un autre langage

Considérons un autre langage pour parler du jeu de chifoumi :

- les symboles de prédicat unaire EstPierre, EstFeuille et EstCiseaux ainsi que les symboles de prédicat binaire gagne et perd,
- Les variables d’objet x et y,
- Les connecteurs logiques de la logique des prédicats.

Question. Exprimer les phrases suivantes en logique des prédicats :

1. Feuille ne peut pas gagner contre feuille.
   Solution : $\neg\exists x\exists y\big(\texttt{EstFeuille}(x) \wedge \texttt{EstFeuille}(y) \wedge \texttt{gagne}(x,y)\big)$ *;*
   ou bien : $\forall x\forall y\big((\texttt{EstFeuille}(x) \wedge \texttt{EstFeuille}(y)) \rightarrow \neg\texttt{gagne}(x,y)\big)$

2. Aucun objet *du jeu* ne peut ni gagner ni perdre contre lui-même.
   Solution :
   $\forall x\forall y\Big(\big(\texttt{EstPierre}(x)\wedge\texttt{EstPierre}(y)\big)\vee\big(\texttt{EstFeuille}(x)\wedge\texttt{EstFeuille}(y)\big)\vee\big(\texttt{EstCiseaux}(x)\wedge\texttt{EstCiseaux}(y)\big) \rightarrow \neg\texttt{gagne}(x,y)\Big)$

3 Le jeu de chifoumi : théorie des modéles

Pour le langage de la section 1, considérons l'interprétation I suivante :

- $D = \{p, f, c\}$
- $IF(\texttt{pierre}) = IF(\texttt{roc}) = p$
  $IF(\texttt{feuille}) = IF(\texttt{papier}) = f$
  $IF(\texttt{ciseaux}) = c$
- $IP(\texttt{gagne})(d_1, d_2) = 1$ ssi $d_1{=}f$ et $d_2{=}p$, ou bien $d_1{=}c$ et $d_2{=}f$, ou bien $d_1{=}p$ et $d_2{=}c$.
  $IP(\texttt{perd})(d_1, d_2) = 1$ ssi $d_1{=}p$ et $d_2{=}f$, ou bien $d_1{=}f$ et $d_2{=}c$, ou bien $d_1{=}c$ et $d_2{=}p$.

Question 1. Donner les valeurs de vérité des formules suivantes en I:

1. $\exists x\texttt{perd}(x,x)$
   Solution : $I(\exists x\texttt{perd}(x,x)) = 0$ *car il n'y a pas de variante* I_x *de* I *en* x *telle que* $I_x(\texttt{perd}(x,x)) = 1$ *:* *on a* $IP(\texttt{perd})(d_1,d_2) = 1$ *seulement pour* d_1 *et* d_2 *différents.*

2. $\exists y\forall x\texttt{gagne}(x,y)$
   Solution : $I(\exists y\forall x\texttt{gagne}(x,y)) = 0$

3. $\forall x\exists y\texttt{gagne}(x,y)$
   Solution : $I(\forall x\exists y\texttt{gagne}(x,y)) = 1$

4. $\forall x\big(\texttt{gagne}(\texttt{pierre},x) \leftrightarrow \texttt{gagne}(\texttt{roc},x)\big)$
   Solution : $I\big(\forall x(\texttt{gagne}(\texttt{pierre},x) \leftrightarrow \texttt{gagne}(\texttt{roc},x))\big) = 1$

5. $\big(\exists y\forall x\texttt{gagne}(x,y)\big) \rightarrow \forall x\exists y\texttt{gagne}(x,y)$
   Solution : $I\Big((\exists y\forall x\texttt{gagne}(x,y)) \rightarrow \forall x\exists y\texttt{gagne}(x,y)\Big) = 1$ *car* $I\big(\exists y\forall x\texttt{gagne}(x,y)\big) = 0$ *(voir question 2).*

Question 2. Donner l'interprétation correspondante pour le langage de la section 2.
Solution :

- $D = \{p, f, c, \ldots\}$ *(!)*
- $IP(\texttt{EstPierre})(d) = 1$ *ssi* $d = p$*, pour tout* $d \in D$
  $IP(\texttt{EstFeuille})(d) = 1$ *ssi* $d = f$*, pour tout* $d \in D$
  $IP(\texttt{EstCiseaux})(d) = 1$ *ssi* $d = c$*, pour tout* $d \in D$
  $IP(\texttt{gagne})(d_1, d_2) = 1$ *ssi* . . . *(v.s.)*
  $IP(\texttt{perd})(d_1, d_2) = 1$ *ssi* . . . *(v.s.)*

Question 3. Comparez les deux langages. Y-en-a-t-il un qui est 'meilleur' ? (dans le sens : 'mieux adapté à la représentation des connaissances car plus flexible')